1. Un breve riassunto sui numeri complessi

I numeri complessi sono un'estensione dei numeri reali, a cui si aggiunge *l'unità immaginaria* i, che ha la proprietà che $i^2 = -1$. Tutti gli altri numeri complessi si scrivono come $a + ib$, dove a, b sono numeri reali (questa scrittura si chiama *forma algebrica* del numero reale). a is chiama *parte reale* di z, b *parte immaginaria* di z. Questo modo di rappresentare i complessi suggerisce di identificare $a + ib$ con il punto (a, b) del piano (che prende il nome di *piano di Gauss*).

Per sommare o moltiplicare due numeri complessi in forma algebrica, si effettua l'operazione come se i fosse una lettera, per poi ricordare che $i^2 = -1$:

Esempio 1.

$$(2 + 3i) + (-1 + i) = (2 - 1) + (3 + 1)i = 1 + 4i$$

$$(2 + 3i)(-1 + i) = -2 + 2i - 3i + 3i^2 = -2 - i + 3(-1) = -5 - i.$$

Fra poco rivedremo anche come dividere due numeri complessi (ovvero, come calcolare l'inverso moltiplicativo di un numero complesso non nullo).

Il complesso $z = a + ib$ ha il suo *complesso coniugato*, che è il numero $\bar{z} = a - ib$ (stessa parte reale, parte immaginaria opposta). Ogni complesso ha inoltre un *modulo*, che è il numero reale non negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Notare che

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Visto questo, se $z \neq 0$ (e quindi $|z| \neq 0$) possiamo scrivere

$$1 = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = z\frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad \text{quindi} \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Questo ci permette di calcolare anche le divisioni fra complessi:

Esempio 2.

$$\frac{2 + 3i}{-1 + i} = (2 + 3i)(-1 + i)^{-1} = (2 + 3i)\frac{\overline{-1 + i}}{|-1 + i|^2} = (2 + 3i)\frac{-1 - i}{2} = \frac{1 - 5i}{2}.$$

Da ultimo ricordiamo un altro modo di rappresentare i numeri complessi. Osserviamo che per il teorema di Pitagora, il modulo $|z|$ del complesso $z = a + ib$ è la sua distanza da 0, una volta che lo rappresentiamo come un punto del piano di Gauss. Se dividiamo $z \neq 0$ per il suo modulo, otteniamo un complesso $z/|z|$ di modulo 1, ovvero che corrisponde a un punto del cerchio di centro 0 e raggio 1. Questi punti hanno coordinate $(\cos\theta, \sin\theta)$ per qualche angolo $-\pi \leq \theta < \pi$ (questo per *definizione* di seno e coseno). L'angolo θ costruito in questo modo si chiama *argomento* di z, e si indica con $\mathsf{arg} z$. Ovvero, se $z \neq 0$:

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\mathsf{arg} z) + i\sin(\mathsf{arg} z), \quad \text{quindi} \quad z = |z|(\cos(\mathsf{arg} z) + i\sin(\mathsf{arg} z)).$$

Quella sulla destra si chiama *forma trigonometrica* di z (ce l'hanno solo i complessi diversi da 0). Questa forma è utile per calcolare prodotti, inversi e altre potenze: se $z \neq 0, w \neq 0$

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos(\mathsf{arg} z) + i\sin(\mathsf{arg} z)), \quad w = |w|(\cos(\mathsf{arg} w) + i\sin(\mathsf{arg} w)) \\ zw &= |z||w|(\cos(\mathsf{arg} z + \mathsf{arg} w) + i\sin(\mathsf{arg} z + \mathsf{arg} w)), \\ z^n &= |z|^n(\cos(n\mathsf{arg} z) + i\sin(n\mathsf{arg} z)) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(formule di De Moivre).

2. Soluzione di alcuni esercizi del Foglio 11 sui numeri complessi

Esercizio 6.

(a) $$(1+i)z = 3i \iff z = \frac{3i}{1+i} = \frac{3i(1-i)}{2} = \frac{3+3i}{2}.$$

(b) $(5+2i)z + (2+i) = -4-i \iff (5+2i)z = -6-2i \iff$
$$z = \frac{-6-2i}{5+2i} = \frac{(-6-2i)(5-2i)}{29} = \frac{-34+2i}{29}.$$

(c) Abbiamo: $(2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 3+4i;$
$$(2+i)^4 = (3+4i)^2 = 9+24i+16i^2 = -7+24i;$$
$$(2+i)^5 = (2+i)(3+4i) = 2+11i.$$
Quindi: $(2+i)^5 z = i \iff (2+11i)z = i \iff z = \dfrac{i}{2+11z} = \dfrac{11+2z}{125}.$

(d) Abbiamo: $i^{137} = i^{4\cdot 34+1} = (i^4)^{34} i = i;$

Quindi: $i^{137}z + (3-i) = 4-2i \iff iz = 1-i \iff z = \dfrac{1-i}{i} = -1-i.$

(e) Come in (d), abbiamo: $2019 \equiv_4 3, \implies i^{2019} = i^3 = -i;$

Quindi: $i^{2019}z = 20+20i \iff -iz = 20+20i \iff z = \dfrac{20+20i}{-i} = -20+20i.$

Osservazione: Le potenze di i sono facili da calcolare: siccome $i^4 = 1$, basta considerare il resto modulo 4 dell'esponente, come fatto in (d) e in (e). In generale, un modo per calcolare le potenze è quello usato nel punto (c): questo però *non è il modo migliore*. Infatti è chiaro che per esponenti molto grandi comporta un sacco di conti. Il modo più efficiente per calcolare le potenze è usando la forma trigonometrica del numero complesso, come rivisto nella prima parte.

Esercizio 7. Siano $z = a+ib$ e $w = c+id$, quindi $\bar{z} = a-ib$ e $\bar{w} = c-id$.

(a) $|\bar{z}|^2 = |a+i(-b)| = a^2+(-b)^2 = a^2+b^2 = |a+ib| = |z|^2$; quindi $|\bar{z}| = |z|$.

(b) $\overline{z+w} = \overline{(a+c)+i(b+d)} = (a+c)-i(b+d) = (a-ib)+(c-id) = \bar{z}+\bar{w}.$

(c) $\overline{zw} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = (ac-bd)-i(ad+bc)$

e partendo dal fondo: $\bar{z}\bar{w} = (a-ib)(c-id) = (ac-bd)-i(ac+bd)$

(d) Questo l'abbiamo osservato nella prima parte.

(e)
$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{|z|(\cos(\mathsf{arg}z)+i\sin(\mathsf{arg}z))} = |z|\overline{(\cos(\mathsf{arg}z)+i\sin(\mathsf{arg}z))} = \\ &= |z|(\cos(\mathsf{arg}z)-i\sin(\mathsf{arg}z)) = |\bar{z}|(\cos(-\mathsf{arg}z)+i\sin(-\mathsf{arg}z)),\end{aligned}$$

quindi $\mathsf{arg}\bar{z} = -\mathsf{arg}z$. Nel dettaglio:

- Nella prima uguaglianza abbiamo semplicemente scritto la forma trigonometrica di z.
- Nella seconda abbiamo usato il fatto, dimostrato in (c), che il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati; inoltre, siccome $|z|$ è un numero reale, abbiamo usato subito che $\overline{|z|} = |z|$ (è uguale al proprio coniugato).
- Nella terza abbiamo applicato la definizione di coniugato.
- Nella quarta abbiamo usato il fatto che per ogni angolo θ si ha
$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta).$$
  Inoltre, abbiamo anche usato che $|z| = |\bar{z}|$, dimostrato nel punto (a).

- Rileggendo tutta la catena di uguaglianze, abbiamo trovato che $-\mathsf{arg}z$ è un angolo (compreso tra $-\pi$ e π perchè anche $\mathsf{arg}z$ lo è per definizione) che ci permette di scrivere $\bar{z}$ in forma trigonometrica. Quindi, per definizione $-\mathsf{arg}z$ è l'argomento di $\bar{z}$, e abbiamo concluso.

Esercizio 8. Sia z una soluzione complessa di $ax^2 + bx + c = 0$; questo significa che sostituendo otteniamo un'uguaglianza di due numeri complessi $az^2+bz+c = 0$. In particolare, anche i loro coniugati devono essere uguali, ovvero $\overline{az^2 + bz + c} = \bar{0}$. Se adesso applichiamo più volte le proprietà del coniugio dimostrate nei punti (b) e (c) dell'esercizio precedente, e osserviamo che siccome a, b, c e 0 sono numeri reali, allora $\bar{a} = a, \bar{b} = b, \bar{c} = c$ e $\bar{0} = 0$, otteniamo che:

$$a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = 0,$$

ovvero che anche $\bar{z}$ è una soluzione della stessa equazione. Notare che questo argomento funziona per tutte le equazioni polinomiali a coefficienti reali, non importa il grado: se z è una soluzione di una tale equazione, anche $\bar{z}$ lo è.

Esercizio 9. $z = -1 + i$, $w = 1 + i\sqrt{3}$.

(a) Per trovare la forma trigonometrica di z, lo dividiamo per il suo modulo: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, quindi $z/|z| = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$. Ora dobbiamo trovare $\mathsf{arg}z$, che è un angolo tale che $\cos(\mathsf{arg}z) = -\sqrt{2}/2$ e $\sin(\mathsf{arg}z) = \sqrt{2}/2$. Questi sono valori noti, e l'angolo è $\mathsf{arg}z = 3\pi/4$. Quindi $z = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$.

$\bar{z} = -1-i$, $|\bar{z}| = \sqrt{2}$, $\quad \bar{z}/|\bar{z}| = -\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2$, $\quad \bar{z} = \sqrt{2}(\cos(-3\pi/4)+i\sin(-3\pi/4))$

Questo non è un caso, in quanto abbiamo visto in 7.e che $\mathsf{arg}\bar{z} = -\mathsf{arg}z$; quindi sapendo la forma trigonometrica di z avremmo potuto concludere subito senza fare conti.

$$\begin{aligned} -z &= \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)) \\ w &= 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) \\ \bar{w} &= 2(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) \\ -w &= 2(\cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3)) \end{aligned}$$

(b) $\quad z^9 = |z|^9(\cos(9 \cdot \mathsf{arg}z) + i\sin(9 \cdot \mathsf{arg}z)) = 16\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)$

Notare che l'argomento è di nuovo $3\pi/4$ perchè $9 \cdot 3\pi/4 = 6\pi + 3\pi/4$ e l'argomento si calcola a meno di multipli di 2π (perchè $\cos(6\pi + 3\pi/4) = \cos(3\pi/4)$ e idem per il seno).

$$\bar{z}^4 = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi)),\ (-w)^3 = 8(\cos(0) + i(\sin(0))) = 8$$

quindi $\bar{z}^4(-w)^3 = 32(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.

$$z^8 = 16(\cos(0) + i\sin(0)) = 16,\ w^6 = (-w^3)^2 = 64$$

quindi $\dfrac{z^8}{w^6} = \dfrac{1}{4}$.