

Nome e Cognome Matricola:

--	--	--	--	--

Seconda Prova Parziale di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
13 dicembre 2019

Numerare e scrivere il nome in tutti i fogli che si consegnano.
Risultati senza svolgimento non verranno presi in considerazione.

1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} \beta x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + \beta x_2 + x_4 = 2 \\ \beta x_3 = 3 \\ x_2 + \beta x_4 = 4 \end{cases},$$

dove β è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro:

- a) la matrice dei coefficienti del sistema è invertibile;
- b) la matrice dei coefficienti del sistema è definita positiva;
- c) il metodo di Jacobi applicato al sistema converge.

Inoltre:

- d) Posto $\beta = 2$, si calcoli la prima iterata del metodo di Jacobi, a partire dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0, 0]^T$;
- e) senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta si dica se nel caso $\beta = \frac{3}{2}$ il metodo di Gauss-Seidel converge;
- f) BONUS (SOLO PER CHI SVOLGE TUTTI I PUNTI PRECEDENTI): stabilire se per $\beta \neq 0$ la matrice dei coefficienti del sistema è irriducibile partendo dal grafo associato ad essa.

Soluzione. a) $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

b) $\beta \in (\sqrt{2}, \infty)$.

c) $\beta \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

d) $\mathbf{x}^{(1)} = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2]^T$.

e) Il metodo di Gauss-Seidel converge in quanto per $\beta = \frac{3}{2}$ la matrice dei coefficienti è simmetrica definita positiva (essendo $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$).

f) La matrice non è irriducibile in quanto il grafo associato non è fortemente connesso (ad esempio non si può giungere dal nodo 3 al nodo 2).

2. La funzione nonlineare

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

si annulla in un punto $\alpha < 0$. Si determini:

- a) l'intervallo $[k, k + 1]$ che contiene α ;
- b) l'approssimazione di α che si ottiene con una iterazione del metodo di bisezione a partire dall'intervallo $[a_1, b_1] = [k, k + 1]$ determinato al punto a);

- c) l'iterata $x^{(2)}$ del metodo delle secanti partendo dai valori $x^{(0)} = k$ e $x^{(1)} = k + 1$ determinati al punto a);
- d) BONUS (SOLO PER CHI SVOLGE TUTTI I PUNTI PRECEDENTI): l'ordine di convergenza dei metodi utilizzati.

Soluzione. a) $\alpha \in [-3, -2]$.

b) $c_2 = -\frac{11}{4} = -2.75$.

c) $x^{(2)} = -\frac{14}{5} = -2.8$

d) Il metodo di bisezione ha sempre ordine di convergenza pari a 1. Il metodo delle secanti ha ordine di convergenza $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$.

3. Utilizzando la rappresentazione di Lagrange, costruire il polinomio interpolante la funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

nei punti di ascissa $x_0 = -1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Si calcoli l'errore di relativo che si commette nell'approssimare la funzione con tale polinomio nel punto $x = 1$.

BONUS (SOLO PER CHI SVOLGE TUTTI I PUNTI PRECEDENTI): si ricavi il polinomio che interpola la stessa funzione utilizzando la rappresentazione canonica.

Soluzione. Polinomio nella forma di Lagrange $p_2 = -x^2 + 2x + 2$, $\text{err} = 2$.

Polinomio nella rappresentazione canonica $p_2 = -x^2 + 2x + 2$ (essendo verificata la condizione di unisolvenza i due polinomi coincidono).