Jorge Vitória, email: jorge.vitoria@unica.it
Università di Studi di Cagliari, 2019/2020
Corso di Laurea in Informatica

Registro delle lezioni di MATEMATICA DISCRETA

Lezione 1 (24/09/2019): Introduzione e presentazione del corso. Insiemi e i suoi elementi. Insiemi definiti dalle proprietà dei suoi elementi. Esempi. Gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali. Sottoinsiemi e uguaglianza fra due insiemi. Intersezione e unione di due sottoinsiemi, e complemento di un sottoinsieme.

Lezione 2 (25/09/2019): Algebra booleana: gli operazioni $\wedge$, $\vee$ e $\sim$ e tavole di verità. Esempi. Formule. Descrizione delle operazioni fra sottoinsiemi attraverso operazioni dell'algebra booleana. Leggi di De Morgan, e conseguenze per la teoria degli insiemi.

Lezione 3 (27/09/2019): L'implicazione e la doppia implicazione. Tautologia e contraddizione. Esempi. Quantificatori universali. Unione e intersezione di un insieme di sottoinsiemi. Esempi.

Lezione 4 (2/10/2019): Relazioni su un insieme. Relazioni riflessive, simmetriche e transitive; relazioni di equivalenza. Esempi. Classi di equivalenza e l'insieme quoziente. Esempi.

Lezione 5 (2/10/2019): Proprietà delle classi di equivalenza per una relazione di equivalenza. Dimostrazione del fatto che le classi di equivalenza costituiscono una partizione del insieme. Funzioni: definizione e esempi. Funzioni iniettive.

Lezione 6 (4/10/2019): Funzioni suriettive e funzioni biiettive. Esempi. Immagine e controimmagine: definizioni e esempi. Composizione di funzioni. Esempi di composizioni che non commutano. Dimostrazione del fatto che la composizione di funzioni è associativa.

Lezione 7 (8/10/2019): La funzione identità. Funzioni invertibili a destra e funzioni invertibili a sinistra. Relazione fra innietività, suriettività e invertibilità di una funzione. Esempi. Cardinalità di un insieme finito. Disuguaglianze fra la cardinalità di due insiemi e esistenza di funzioni iniettive, suriettive o biiettive fra di loro.

Lezione 8 (9/10/2019): Principio della piccionaia. Permutazioni di un insieme finito. L'operazione fattoriale come cardinali dell'insieme delle permutazioni. Composizione di permutazioni. Definizione di gruppo. Esempi. Il gruppo delle permutazioni di un insieme finito. Permutazioni come composizione di cicli disgiunti.

Lezione 9 (11/09/2019): Come scrivere un ciclo come un prodotto di trasposizioni. Le trasposizioni generano il gruppo delle permutazioni. L'inversa di una permutazione. Parità di una permutazione. Esempi. Permutazioni con ripetizioni. Combinazioni semplici.

Lezione 10 (15/10/2019): Proprietà elementari dei coefficienti binomiali. Il triangolo di Pascal-Tartaglia. Disposizioni semplici e disposizioni con ripetizioni. Esempi. Combinazioni con ripetizioni.

Lezione 11 (16/10/2019): Il metodo dell'induzione. Esempi. Dimostrazione della espansione del binomio di Newton.

Lezione 12 (18/10/2019): La somma di una riga del triangolo di Pascal-Tartaglia. Insiemi infiniti: relazione di equipotenza e le sue proprietà. Insiemi numerabili. Dimostrazione del fatto che sia $\mathbb{Z}$ che $\mathbb{Q}$ sono numerabili. Dimostrazione del fatto che $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Lezione 13 (22/10/2019): L'insieme potenza. Teorema di Cantor. Il concetto di anello. L'anello dei numeri interi. Algoritmo di divisione. Scrittura di un numero intero in una base $b \geq 2$.

Lezione 14 (23/10/2019): Esempi di scrittura di numeri interi in una base $b \geq 2$. Divisori e numeri primi. Teorema fondamentale dell'aritmetica. Massimo comune divisore e algoritmo di Euclide. Esempi.

Lezione 15 (25/10/2019): Dimostrazione del algoritmo di Euclide. Esistenza di soluzioni intere per equazioni del tipo $ax+by = n$ dove a, b e n sono numeri naturali. Numeri primi tra loro. La funzione di Euler: definizione, proprietà e formula. Dimostrazione dal fatto che l'insieme dei numeri primi non è finito.

Lezione 16 (29/10/2019): Relazione di congruenza modulo n. Dimostrazione del fatto che la relazione di congruenza modulo n è una relazione di equivalenza. Classi di congruenza modulo n. Teorema sulla compatibilità fra la relazione di congruenza e la somma e prodotto di interi. Operazioni di somma e prodotto nelle classi di congruenza. Esempi.

Lezione 17 (05/11/2019): L'anello delle classi di congruenza modulo n. Alcune proprietà di questo anello. Equazioni del tipo $ax \equiv 1 \pmod{n}$ (e inversi moltiplicativi modulo n) e equazioni del tipo $ax \equiv b \pmod{n}$: criterio per la esistenza di soluzioni, e algoritmo per trovare le soluzioni.

Lezione 18 (06/11/2019): Riassunto sull'argomento delle equazioni modulari. Ceni di crittografia: cifrario di Cesare e cifrari affini. Il teorema di Euler e il piccolo teorema di Fermat. RSA: procedura e esempi.

Lezione 19 (08/11/2019): Vettori nel piano e nello spazio. Somma di vettori e prodotto di un numero reale per un vettore. Proprietà di queste operazioni. Combinazioni lineari di un insieme di vettori. Il concetto di base (nel piano e nello spazio). Idea (sul piano) di come scrivere un vettore come combinazione lineare rispetto ad una base. Coordinate di un vettore rispetto ad una base.

Lezione 20 (12/11/2019): Coordinate della somma di due vettori e del prodotto di un scalare per un vettore (rispetto ad una base fissata). Calcolo della lunghezza di un vettore tramite le sue coordinate rispetto ad una base ortonormale. Calcolo dell'angolo fra due vettori.

Lezione 21 (13/11/2019): Breve riassunto di trigonometria elementare. Esempio del calcolo dell'angolo fra due vettori. Prodotto scalare di due vettori. Osservazione che il prodotto scalare di due vettori è zero se e solo se i vettori sono perpendicolari. Equazioni parametriche di una retta nel piano e nello spazio e equazioni parametriche di un piano nello spazio. Esempi.

Lezione 22 (15/11/2019): Equazioni parametriche di una retta nel piano e nello spazio che contiene due punti dati. Equazioni parametriche di un piano che contiene tre punti non allineati. Equazione cartesiana di una retta nel piano che contiene un dato punto ed è perpendicolare ad un dato vettore. Equazione cartesiana di un piano nello spazio che contiene un dato punto ed è perpendicolare ad un dato vettore. Equazioni cartesiane di una retta nello spazio che contiene un punto ed è perpendicolare a due dati vettori non allineati.

Lezione 23 (20/11/2019): Sistemi di equazioni lineari reali. Soluzioni. Matrice completa e matrice dei coefficienti associate ad un sistema di equazioni. Sistemi incompatibili. Sistemi omogenei. Esempi.

Lezione 24 (21/11/2019): Metodo di eliminazione di Gauss-Jordan. Matrici a gradini e risoluzione di sistemi di equazioni tramite questo metodo. Rango di una matrice. Esempi.

Lezione 25 (22/11/2019): Applicazioni geometriche del metodo di eliminazione di Gauss-Jordan: intersezione fra due rette, rette sghembe e parallele, intersezione fra una retta e un piano, equazione di un piano che contiene una data retta e un dato punto. Esempi.

Lezione 26 (26/11/2019): Concetti di spazio vettoriale, indipendenza lineare e basi. Teorema dell'esistenza di basi (senza dimostrazione). Dimensione. Esempi di indipendenza lineare. Funzioni lineari.

Lezione 27 (27/11/2019): Rotazioni e riflessioni come funzioni lineari. Matrice associata ad una funzione lineare. Esempi. Composizione di funzioni lineari è lineare.

Lezione 28 (29/11/2019): Prodotto di matrici e composizione di funzioni lineari. Il prodotto di matrici non è commutativo. Associatività del prodotto di matrici e la matrice identica. Corrispondenza fra la matrice identica e la funzione identità. Matrici invertibili. Esempi.

Lezione 29 (03/12/2019): Dimostrazione dei seguenti risultati: 1) una matrice $m \times n$ ha rango n se e solo se la funzione lineare associata è iniettiva; 2) una matrice $m \times n$ ha rango m se e solo se la funzione lineare associata è suriettiva; 3) una matrice $m \times n$ è invertibile se e solo se $m = n$ e il suo rango è n.

Lezione 30 (04/12/2019): Algoritmo per trovare la matrice inversa di una matrice quadrata. Esempi. Il determinante di una matrice quadrata. Il determinante di una matrice 2×2 e di una matrice 3×3. Esempi.

Lezione 31 (06/12/2019): Sviluppo di Laplace lungo una riga o lungo una colonna per il calcolo del determinante. Esempi. Una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Calcolo della inversa di una matrice attraverso dei suoi cofattori e del suo determinante. Esempio.

Lezione 32 (10/12/2019): Teorema di Cramer. Esempio. Dimostrazione di alcune proprietà del determinante.

Lezione 33 (11/12/2019): Continuazione della dimostrazione di alcune proprietà del determinante. La matrice trasposta. Operazioni sulle colonne e proprietà del determinante rispetto a queste operazioni. Teorema di Binet e alcune applicazioni. Il gruppo GL_n e l'anello delle matrici $n \times n$.

Lezione 34 (13/12/2019): Prodotto vettoriale fra due vettori nello spazio. Dimostrazione di alcune proprietà del prodotto vettoriale. Interpretazione geometrica del prodotto vettoriale (calcolo di aree e volumi). Introduzione ai numeri complessi. Definizione di campo. Esempi.

Lezione 35 (17/12/2019): Operazioni con numeri complessi. Dimostrazione dal fatto che i numeri complessi costituiscono un campo. Potenze di i. Il piano complesso: rappresentazioni geometriche e modulo di numeri complessi. Forma trigonometrica e formula di Moivre.

Lezione 36 (18/12/2019): Risoluzione dell'esame modello.