

SoluzioniPARTE A

① $X = \{a, b, c, d, e, f\}$

a) X è un insieme con 6 elementi.

il numero di sottoinsiemi con 3 elementi è
il numero di possibilità di scelta di 3 elementi
da questi 6, senza tenere in conto l'ordine.
Questo numero è, per definizione, il coefficiente
binomiale $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$.

il numero di sottoinsiemi con 4 elementi sarà,
per lo stesso motivo il coefficiente binomiale $\binom{6}{4} =$
 $= \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$.

il numero di sottoinsiemi con 5 elementi è
 $\binom{6}{5} = 6$ e con 6 elementi è $\binom{6}{6} = 1$.

Quindi il numero di sottoinsiemi con 3, 4, 5 o 6
elementi è $20 + 15 + 6 + 1 = 42$.

b) $\alpha : X \longrightarrow \{0, 1\}$

$a \longmapsto 0$

$b \longmapsto 1$

$c \longmapsto 1$

$d \longmapsto 1$

$e \longmapsto 0$

$f \longmapsto 1$

α non è iniettiva
perché esistono due
elementi diversi di X
(per esempio b e c)
che hanno la stessa
immagine $\alpha(b) = \alpha(c) = 1$.

α è suriettiva perché per ogni elemento del codominio
esiste un elemento del dominio che lo ha per immagine.
Infatti, $\alpha(a) = 0$ e $\alpha(b) = 1$.

c) $R = \{ (x, y) \in X^2 : \alpha(x) - \alpha(y) = 0 \}$

(2)

i) Dimostriamo che R è una relazione di equivalenza, cioè, che ~~anche~~ R è riflessiva, simmetrica e transitiva. Si osservi che $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ ~~anche~~
 $\Leftrightarrow \alpha(x) - \alpha(y) = 0$
 $\Leftrightarrow \alpha(x) = \alpha(y)$.

Riflessiva : Sia $x \in X$. Dimostriamo che $(x, x) \in R$. Ma questo è chiaro dato che, siccome α è una funzione, $\alpha(x) = \alpha(x)$ e quindi $(x, x) \in R$.

Simmetrica : Dato $(x, y) \in R$ abbiamo che $\alpha(x) = \alpha(y)$. Questo significa che $\alpha(y) = \alpha(x)$ e $(y, x) \in R$. Allora R è simmetrica.

Transitiva : Supponiamo che (x, y) e (y, z) appartengono a R . Vogliamo dimostrare che (x, z) appartiene anche a R .

Siccome $(x, y) \in R$, allora $\alpha(x) = \alpha(y)$.

Siccome $(y, z) \in R$, allora $\alpha(y) = \alpha(z)$.

Quindi $\alpha(x) = \alpha(z)$ e la coppia ordinata $(x, z) \in R$, come volevamo dimostrare.

ii) Dato $x \in X$, la sua classe di equivalenza è definita come

$$[x] = \{ y \in X : (x, y) \in R \}$$

Allora, $[a] = \{y \in X : (a, y) \in R\}$ ③
 $= \{y \in X : \alpha(a) = \alpha(y)\}$
 $= \{y \in X : \alpha(y) = 0\} = \{a, e\}$

~~Allo stesso modo~~ $[b] = \{y \in X : (b, y) \in R\}$
 $= \{y \in X : \alpha(b) = \alpha(y)\}$
 $= \{y \in X : 1 = \alpha(y)\} = \{b, c, d, f\}$

Siccome $e \in [a]$, allora $[e] = [a]$ e, per lo stesso ragionamento, $[b] = [c] = [d] = [f]$.
 Quindi, queste due classi sono tutte le classi di equivalenza per la relazione R .

② Dimostriamo per induzione che, per ogni $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Verifica per $n=1$: Voglio vedere che

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Allora $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)}$ ha solo un addendo : $\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$

e quindi la uguaglianza viene verificata.

Verifica che se la proprietà vale per n allora vale anche per $n+1$.

ipotesi di induzione : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Si vuole dimostrare la tesi: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+2)}$ ④

Allora $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\xrightarrow{\text{ipotesi di induzione}} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \quad \text{Come volevamo dimostrare.}$$

Allora l'uguaglianza vale per ogni $n \geq 1$.

③ $14x \equiv 21 \pmod{35}$

Troviamo prima il massimo comune divisore fra 35 e 14.

$$35 = 2 \cdot 14 + 7$$

Quindi il massimo comune divisore è 7.

$$14 = 2 \cdot 7 + 0$$

↑
algoritmo della divisione

Siccome $7 \mid 21$ (infatti $21 = 7 \cdot 3$) Allora l'equazione modulare $14x \equiv 21 \pmod{35}$ ha soluzioni.

Infatti, da $35 = 2 \cdot 14 + 7$ si conclude che $7 = 35 - 2 \cdot 14$ e, quindi,

$$3.7 = 3.(35 - 2.14) \quad (5)$$

$$\Rightarrow 21 = 3.35 - 6.14$$

Quindi, siccome $3.35 \equiv 0 \pmod{35}$, abbiamo che $21 \equiv -6.14 \pmod{35}$.

Cioè, $x = -6$ è soluzione di $14x \equiv 21 \pmod{35}$.

Trovata questa soluzione, tutte le altre soluzioni possono essere ottenute da

$$x = -6 + \frac{35}{\text{med}(14, 35)} \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x = -6 + \frac{35}{7} \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x = -6 + 5k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

PARTIB

(4) B base ortonormale

$$\vec{OP'} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{OQ} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) $\vec{OP'} \cdot \vec{OQ} = |\vec{OP'}| |\vec{OQ}| \cos \theta$, dove θ è l'angolo fra $\vec{OP'}$ e $\vec{OQ}$.

$$\vec{OP'} \cdot \vec{OQ} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1)(-1) = 2 + 1 = 3$$

$$|\vec{OP'}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{OQ}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Quindi } \cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Allora } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

b) Ogni punto P' nella retta r ci dà un vettore $\overrightarrow{OP'}$ che soddisfa

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} + t \overrightarrow{OP}, \text{ dove } t \in \mathbb{R}.$$

Allora se $\overrightarrow{OP'}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ rispetto alla base

$$B, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e quindi}$$

le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

c) il piano π contiene i vettori $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ e, quindi, le equazioni parametriche del piano π sono

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2s + t \\ y = 2s \\ z = -s - t \end{cases}$$

Per ottenere l'equazione cartesiana del piano, facciamo la sostituzione $t = x - 2s$

$$\text{e } s = \frac{y}{2}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ z = -s - (x - 2s) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ z = -\frac{y}{2} - x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = \frac{y}{2} - x}$$

equazione cartesiana di π .

⑤ $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ ⑦

a) Usiamo il metodo dell'eliminazione Gaussiana.

$$A \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \quad \text{Quindi } \text{rang}(A) = 3.$$

Allora A è invertibile e il sistema di equazioni $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ha un'unica soluzione

b) Usiamo la regola di Cramer.

$$\det(A) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{sviluppo lungo} \\ \text{riga 2}}}{(-1)^{2+1}} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$= 2(-3 - (-6)) = 6.$$

Per la regola di Cramer* l'unica soluzione del sistema è

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} \xrightarrow{\substack{\downarrow \\ \text{sviluppo di} \\ \text{Laplace} \\ \text{lungo riga 2}}} = \frac{(-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}}{6}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} \xrightarrow{\substack{\downarrow \\ \text{sviluppo} \\ \text{lungo riga 2}}} = \frac{(-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \frac{2(9+12)}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

$$= \frac{-(9+12) + (-3+6)}{6} =$$

$$= \frac{-18}{6} = -3$$

* la posso usare perchè A è invertibile!

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{(-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}}{6} \quad (8)$$

↓
Sviluppo lungo riga 2

$$= \frac{- (12 + 9) + 2(-6 - 9) - (3 - 6)}{6}$$

$$= \frac{-21 - 30 + 3}{6} = \frac{-48}{6} = -8$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$

(c) Siccome A ha rango n ed è una matrice quadrata $n \times n$, allora f_A è biettiva. L'inversa è lineare ed è determinata dalla matrice A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -4$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = 3$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = -3$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = -9$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$\text{Quindi } A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -9 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

e allora

$$f_A^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ è la funzione } f_A^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \frac{2}{3}z \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z \\ -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}z \end{pmatrix}$$

⑥ Ricordiamo che $i^2 = i^k$ se $n \equiv k \pmod{4}$ ⑨

Allora $198 = 49 \cdot 4 + 2$ e, quindi,

↓
algoritmo di divisione

$$i^{198} = i^2 = -1.$$

Allora abbiamo $i^{198} z - 3z = 4 - i$

$$\Rightarrow -z - 3z = 4 - i$$

$$\Rightarrow -4z = 4 - i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4-i}{-4} \Leftrightarrow \boxed{z = -1 + \frac{1}{4}i}$$

PARTIE C

⑦ $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$

a) Dati $A, B \in SL_n(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

↓
Teorema di Binet
 $= 1 \cdot 1 = 1.$

Allora $AB \in SL_n(\mathbb{R})$.

Vediamo che $SL_n(\mathbb{R})$ è un gruppo per l'operazione di prodotto di matrici.

- Il prodotto di matrici è associativo (visto in lezione)
- La matrice I_n ha determinante 1 e quindi appartiene a $SL_n(\mathbb{R})$ ed è l'elemento neutro per il prodotto.
- Data una matrice A in $SL_n(\mathbb{R})$, il suo determinante è diverso da zero e, quindi, è invertibile. La sua matrice inversa ha determinante $\frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{1} = 1$ e quindi ogni elemento di $SL_n(\mathbb{R})$ ha un'inversa in $SL_n(\mathbb{R})$.

(b) La matrice inversa di A , A^{-1} , è uguale a:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_{11}}{\det(A)} & \frac{c_{21}}{\det(A)} & \dots & \frac{c_{n1}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{c_{1n}}{\det(A)} & \frac{c_{2n}}{\det(A)} & \dots & \frac{c_{nn}}{\det(A)} \end{pmatrix}$$

Si osservi che B è la matrice ottenuta da A^{-1} moltiplicando l'ultima riga per $\det(A)$.

$$\text{Allora, } \det(B) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$\downarrow$
cambio di determinante
attraverso operazione
elementare del secondo tipo

$\downarrow$
teorema
di Binet

e quindi $B \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$.