

Esame modello per il Corso di MATEMATICA DISCRETA (2019/2020)
Corso di Laurea in Informatica, Università di Studi di Cagliari
13 Dicembre 2019

Durata: 3 ore

Attenzione: Per ottenere il punteggio massimo in ogni domanda, la risposta deve essere dettagliatamente giustificata. Giustificazioni parziali potranno essere considerate per punteggi parziali. Risposte senza giustificazioni non verranno considerate. Le soluzioni ammissibili sono esclusivamente quelle nella bella. In ogni caso bisogna consegnare anche la brutta copia.

Parte A

1. Si consideri l'insieme $X = \{a, b, c, d, e, f\}$.
 - (a) **(2 punti)** Quanti sottoinsiemi di X hanno almeno 3 elementi?
 - (b) **(1 punto)** Sia V il sottoinsieme di X in cui gli elementi sono le vocali, cioè, $V = \{a, e\}$. Sia $\alpha: X \rightarrow \{0, 1\}$ la funzione che ad ogni elemento di V associa 0 e ad ogni elemento di $X \setminus V$ associa 1. La funzione α è iniettiva? La funzione α è suriettiva?
 - (c) Si consideri la funzione α definita in (b) e la relazione R in X definita per
$$R = \{(x, y) \in X^2 : \alpha(x) - \alpha(y) = 0\}$$
 - i. **(3 punti)** Si dimostri che R è una relazione di equivalenza.
 - ii. **(3 punti)** Si trovino tutte le classi di equivalenza di X per la relazione R .
2. **(3 punti)** Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.
3. **(3 punti)** Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione $14x \equiv 21 \pmod{35}$.

Parte B

4. Sia B una base ortonormale nello spazio e si considerino i seguenti vettori:

$$\vec{OP} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{OQ} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) **(1 punto)** Si calcoli l'angolo fra $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$.
- (b) **(2 punti)** Si determinino l'equazioni parametriche della retta r parallela a $\vec{OP}$ e che passa nel punto Q .
- (c) **(2 punti)** Si determini l'equazione cartesiana del piano π che contiene i punti O, P e Q .

L'esame continua sul verso!

5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) **(2 punti)** Si determini il rango di A , si determini se A è invertibile, e si indichi, senza fare dei calcoli, quante soluzioni ha il seguente sistema di equazioni

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- (b) **(2 punti)** Si calcolino le soluzioni del sistema di equazioni in (a).

- (c) **(3 punti)** Sia $f_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata alla matrice A (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$). La funzione f_A è biiettiva? In caso positivo, si determini l'espressione generale della sua funzione inversa.

6. **(2 punti)** Si risolva in $\mathbb{C}$ l'equazione $i^{198}z - 3z = 4 - i$.

Parte C

7. Si consideri l'insieme $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.

- (a) **(1 punto)** Si dimostri che per ogni coppia di matrici in $SL_n(\mathbb{R})$, il loro prodotto è una matrice in $SL_n(\mathbb{R})$ e si dimostri che $(SL_n(\mathbb{R}), \cdot)$, dove l'operazione $\cdot$ è il prodotto di matrici, è un gruppo.
- (b) **(1 punto)** Data una qualsiasi matrice invertibile A in $M_n(\mathbb{R})$, si dimostri che la matrice $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, definita da

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{C_{ji}}{\det(A)}, & \text{se } i < n \\ C_{ji} & \text{se } i = n \end{cases}$$

dove i numeri C_{ji} sono i cofattori di A , è una matrice in $SL_n(\mathbb{R})$.