

Esercizi per il Corso di MATEMATICA DISCRETA

Foglio 11

13 dicembre 2019

1. Si determini quali delle seguenti matrici sono invertibili, e per ognuna di loro si calcoli la sua inversa (in caso esista) attraverso la matrice dei cofattori associata.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -7 & -6 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Si usi la regola di Cramer per risolvere i sistemi di equazioni (a), (b) e (d) dell'esercizio 1 sul Foglio 8.
3. Sia A una matrice 3×3 e sia B una matrice ottenuta da A attraverso le seguenti operazioni elementari (nell'ordine indicato):

$$R_2 \longrightarrow R_2 + 3R_1$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 - R_1$$

$$R_2 \longrightarrow \frac{1}{2}R_2$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 - 2R_2$$

(a) Si determini la relazione fra $\det(B)$ e $\det(A)$.

(b) Supponiamo adesso che

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

i. Si calcoli $\det(B)$ e $\det(A)$.

ii. Si determini la matrice A .

4. Si considerino le seguenti matrici 3×3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e i vettori:

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si calcolino:

- (a) Le matrici AB e BA e la matrice $AB - BA$;
- (b) Le funzioni $f_A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $f_B: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definite per le matrici A e B ;
- (c) I vettori $f_A(v)$, $f_B(w)$, $(f_A \circ f_B)(z)$;

- (d) I determinanti $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$ e $\det(BA)$;
- (e) Il rango di A e il rango di B .
- (f) Il volume del parallelepipedo determinato per i vettori v , w , z ;
- (g) I prodotti vettoriali $v \times w$, $w \times z$ e $v \times z$;
- (h) Le aree dei parallelogrammi definiti dai vettori v e w , dai vettori v e z e dai vettori w e z ;
- (i) Il volume del parallelepipedo determinato per i vettori v , w e $v \times z$.
5. Siano v e w due vettori in $\mathbb{R}^3$ tali che $v \cdot w = 3$, $|v| = 2$, $|w| = \sqrt{3}$ e tali che l'angolo θ fra v e w si trova nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- (a) Si calcoli l'angolo θ .
- (b) Si calcoli l'area del parallelogramma definito da v e w .
6. Si risolvano su $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni lineari.
- $(1 + i)z = 3i$;
 - $(5 + 2i)z + (2 + i) = -4 - i$;
 - $(2 + i)^5 z = i$;
 - $i^{137} z + (3 - i) = 4 - 2i$;
 - $i^{2019} z = 20 + 20i$;
7. Siano z e w due numeri complessi. Si dimostri che:
- (a) $|\bar{z}| = |z|$;
- (b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- (c) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} w$;
- (d) $z\bar{z} = |z|^2$;
- (e) $\arg \bar{z} = -\arg(z)$;
8. Sia $f(x) = ax^2 + bx + c$, dove a , b e c sono numeri reali. Si dimostri che se un numero complesso z è una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, allora anche $\bar{z}$ è una soluzione della stessa equazione.
9. Sia $z = -1 + i$ e $w = 1 + i\sqrt{3}$.
- (a) Si trovi la rappresentazione trigonometrica dei numeri
- $$z, \bar{z}, -z, w, \bar{w}, -w.$$
- (b) Si usi la formula di de Moivre per trovare la rappresentazione algebrica dei numeri
- $$z^9, \bar{z}^4(-w)^3, \frac{z^8}{w^6}.$$

Alcuni risultati del Foglio 9

1. (a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $h \circ f \sim \begin{pmatrix} -10 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $g \circ h \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$; $k \circ h$ e $g \circ k \circ h \circ f$ non si possono fare.

$$3. \text{ (A) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - y \\ 4x + 2y \end{pmatrix}; \text{ (B) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - y \\ 4x + 2y \\ -2x + 3y \end{pmatrix}; \text{ (C) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x - z \\ 2x + 4y - 3z \end{pmatrix}.$$

$$\text{ (D) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y + 3z \\ 4x + 2y + z \\ -2x + y - 3z \end{pmatrix};$$

$$4. \text{ (a) } 16; \text{ (b) } 8; \text{ (c) } A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}; AC = \begin{pmatrix} -8 & -4 & -6 \\ -4 & 8 & 2 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 20 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix};$$

$$BC = \begin{pmatrix} -8 & -4 & -6 \\ -4 & 8 & 2 \\ 10 & 12 & 11 \end{pmatrix}; CB = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 28 & -3 \end{pmatrix}; CD = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 22 & 3 & 19 \end{pmatrix}; DB = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ 18 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix};$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -10 \\ 6 & 1 & 11 \\ 10 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \text{ (d) Omesso.}$$

$$6 \text{ (a) } k = -6; \text{ (b) } A_0^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} (1)$$

Alcuni risultati del Foglio 10

1. A suriettiva; B nessuna; C iniettiva; D nessuna; E biiettiva; F nessuna; G nessuna; H nessuna; J nessuna; K biiettiva.

2. $\det(D) = 0$; $\det(E) = -19$; $\det(E^2) = 19^2$.

3. Omesso. Sono 24, di cui 12 pari e 12 dispari.

4. (a) $(m, k) = (9, 1) + a(11, -5)$ per $a \in \mathbb{Z}$. Per questi valori $A_{(m,k)}$ ha rango 2; (b) $A_{(-2,5)}^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -12 & 7 & 37 \\ 21 & -15 & -73 \\ 14 & -10 & -45 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -12x + 7y + 37z \\ 21x - 15y - 73z \\ 14x - 10y - 45z \end{pmatrix}$.

5. (a) $\frac{n(n+1)}{2}$.