

Essendo il determinante uno strumento importante per la determinazione dell'invertibilità di una matrice e per il calcolo della sua inversa (nel prossimo capitolo ci servirà anche per il calcolo dei cosiddetti autovalori di una matrice), è fondamentale conoscerne le proprietà, anche allo scopo di agevolarne il calcolo in alcuni casi.

Iniziamo con il chiederci come si comporta il determinante di una matrice rispetto alle operazioni elementari.

- (1) se A' si ottiene da A moltiplicando una riga di A per $c \in \mathbb{K}$, allora $\det(A') = c \det(A)$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è la matrice ottenuta da A moltiplicando la prima riga per $c = 5$, ho $\det(A) = -2$ e $\det(A') = 5 \cdot 4 - 10 \cdot 3 = -10$.

In altre parole, se una riga di una matrice viene moltiplicata per uno scalare c , quando calcoliamo il determinante possiamo “portare fuori” questo scalare.

Proof. In base alla definizione (6.32) di determinante, il determinante della matrice A' in cui abbiamo moltiplicato tutti gli elementi della riga i -esima per c è $\det(A') = \sum s(p) a_{1p(1)} \cdots (c a_{ip(i)}) \cdots a_{np(n)}$: essendo il fattore c comune a tutti gli addendi della sommatoria, possiamo metterlo in evidenza davanti alla somma e scrivere $\det(A') = c \sum s(p) a_{1p(1)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{np(n)}$, ovvero $\det(A') = c \det(A)$, come volevamo. $\square$

- (2) se una riga R_i della matrice A si scrive come somma $R_i = R'_i + R''_i$, si ha

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R'_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R''_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, la seconda riga si scrive come somma $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ e, in accordo con la (6.38), si vede che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

come può essere verificato calcolando i determinanti (si ottiene $-2 = -3 + 1$).

Proof. Se

$$R'_i = (a'_{i1} \ a'_{i2} \ \dots \ a'_{in})$$

$$R''_i = (a''_{i1} \ a''_{i2} \ \dots \ a''_{in})$$

e

$$R_i = R'_i + R''_i = (a'_{i1} + a''_{i1} \ a'_{i2} + a''_{i2} \ \dots \ a'_{in} + a''_{in})$$

allora, in base alla definizione (6.32) di determinante, si ha

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = \sum s(p) a_{1p(1)} \dots (a'_{ip(i)} + a''_{ip(i)}) \dots a_{np(n)} =$$

$$= \sum s(p) a_{1p(1)} \dots a'_{ip(i)} \dots a_{np(n)} + \sum s(p) a_{1p(1)} \dots a''_{ip(i)} \dots a_{np(n)}$$

$$\text{ovvero } \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R'_i \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R''_i \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix}, \text{ come volevamo.} \quad \square$$

- (3) se A' si ottiene da A scambiando tra loro due righe, o due colonne, allora $\det(A') = -\det(A)$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è la matrice ottenuta da A scambiando tra loro la prima e la seconda riga, ho $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$ e $\det(A') = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = +2$.

Proof. Sia A' la matrice ottenuta da A scambiando la riga R_i con la riga R_j : quindi per ogni k si ha $a'_{ik} = a_{jk}$ e $a'_{jk} = a_{ik}$, mentre tutte le altre entrate sono uguali a quelle di A .

Quindi, in base alla (6.32), si ha

$$\begin{aligned}\det(A') &= \sum_{p \in S_n} s(p) a'_{1p(1)} \cdots a'_{ip(i)} \cdots a'_{jp(j)} \cdots a'_{np(n)} = \\ &= \sum_{p \in S_n} s(p) a_{1p(1)} \cdots a_{jp(i)} \cdots a_{ip(j)} \cdots a_{np(n)}.\end{aligned}\quad (6.39)$$

Confrontando la (6.39) con l'espressione

$$\sum_{p \in S_n} s(p) a_{1p(1)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{jp(j)} \cdots a_{np(n)} \quad (6.40)$$

del determinante di A , vediamo che in ogni addendo le entrate “centrali” hanno gli indici di riga i e j scambiati tra loro.

Ora, allo scopo di dimostrare il risultato, riscriviamo la (6.39) come segue: consideriamo la trasposizione $\tau \in S_n$ che scambia i con j e lascia invariati tutti gli altri elementi, e definiamo la funzione $f : S_n \rightarrow S_n$ che associa a ogni permutazione p la composizione $p \circ \tau$.

Tale funzione è invertibile (infatti, ha come inversa se stessa: $f(f(p)) = f(p \circ \tau) = p \circ \tau \circ \tau = p$, dove abbiamo usato il fatto che, come per ogni trasposizione, $\tau \circ \tau = id$) quindi biiettiva e quindi suriettiva, il che significa che al variare di $p \in S_n$ anche $p \circ \tau$ ci dà tutte le permutazioni di S_n .

Allora, poiché nella sommatoria (6.39) l'importante è che ci sia un addendo per ogni permutazione, possiamo sostituire il p che compare in ognuno di questi addendi con $p \circ \tau$, che come abbiamo detto al variare di $p \in S_n$ ci dà comunque tutte le permutazioni: otteniamo

$$\det(A') = \sum_{p \in S_n} s(p \circ \tau) a_{1(p \circ \tau)(1)} \cdots a_{j(p \circ \tau)(i)} \cdots a_{i(p \circ \tau)(j)} \cdots a_{n(p \circ \tau)(n)}.$$

Dal momento che τ scambia i e j lasciando invariati tutti gli altri elementi di $\{1, 2, \dots, n\}$, si ha $(p \circ \tau)(1) = p(\tau(1)) = p(1)$, $(p \circ \tau)(i) = p(\tau(i)) = p(j)$, $(p \circ \tau)(j) = p(\tau(j)) = p(i)$, $\dots$, $(p \circ \tau)(n) = p(\tau(n)) = p(n)$ e quindi otteniamo

$$\det(A') = \sum_{p \in S_n} s(p \circ \tau) a_{1p(1)} \cdots a_{jp(j)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{np(n)} \quad (6.41)$$

Vediamo ora che quest'ultima espressione è uguale a quella (6.40) del determinante di A a parte che in essa compare $s(p \circ \tau)$ invece che $s(p)$. Ora, in base alla definizione di segno, si ha $s(p \circ \tau) = -s(p)$: infatti, se $s(p) = +1$ allora questo significa che p si scrive come prodotto di un numero pari di trasposizioni, e quindi $p \circ \tau$, contenendo in più la trasposizione τ , risulterà prodotto di un numero dispari di trasposizioni, da cui $s(p \circ \tau) = -1$. Analogamente, se $s(p) = -1$ allora $s(p \circ \tau) = +1$. Quindi la (6.41) diventa

$$\begin{aligned} \det(A') &= \sum_{p \in S_n} -s(p) a_{1p(1)} \cdots a_{jp(j)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{np(n)} = \\ &= - \sum_{p \in S_n} s(p) a_{1p(1)} \cdots a_{jp(j)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{np(n)} = -\det(A) \end{aligned}$$

come volevamo. □

La proprietà (2) ci consente di capire come si comporta il determinante quando eseguiamo operazioni elementari del terzo tipo: infatti, supponiamo che A' sia ottenuta da A sommando alla sua i -esima riga R_i la j -esima riga R_j

moltiplicata per c , ovvero $A' = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + cR_j \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$. Ma allora, per la proprietà (2) ho

$$\det(A') = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + cR_j \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ cR_j \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

Ma mentre il primo addendo è il determinante della matrice A , il secondo addendo è nullo, in quanto determinante di una matrice con le righe dipendenti (compaiono R_j e cR_j che sono proporzionali).
Quindi la (6.42) si legge

$$\det(A') = \det(A) + 0 = \det(A).$$

Concludiamo che *quando eseguiamo un'operazione elementare del terzo tipo sulle righe di una matrice, il determinante non cambia.*

Questo risultato può essere usato per facilitarci il calcolo del determinante di una matrice, in quanto mediante operazioni elementari del terzo tipo possiamo “semplificare” la matrice trasformando alcune entrate in 0 (analogamente a quello che si fa nella riduzione a gradini), e scegliere poi nello sviluppo di Laplace la riga o la colonna che presenta il numero maggiore di questi zeri così comparsi (ricordiamo che se un'entrata è zero non è necessario calcolare il corrispondente cofattore).

Al limite, mediante tali operazioni potremmo anche trasformare la matrice in una matrice della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

Il determinante di tale matrice è dato semplicemente dal prodotto $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ degli elementi della sua diagonale: infatti, sviluppando secondo Laplace rispetto alla prima colonna, essendo a_{11} l'unico elemento non nullo, si avrà

$$\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & \vdots & & \\ 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se sviluppiamo ora il cofattore di nuovo secondo Laplace rispetto alla sua prima colonna, che ha come unico elemento non nullo a_{22} , otteniamo

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \det \begin{pmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ & \vdots & & \\ 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e continuando a sviluppare sempre rispetto alla prima colonna otteniamo proprio $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Osservazione 6.16. Tutte le proprietà del determinante che abbiamo visto valide per operazioni sulle righe sono vere anche se effettuiamo le stesse operazioni sulle colonne, ovvero:

- (1) se A' si ottiene da A moltiplicando una colonna di A per $c \in \mathbb{K}$, allora $\det(A') = c \det(A)$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$ è la matrice ottenuta da A moltiplicando la prima colonna per $c = 5$, ho $\det(A) = -2$ e $\det(A') = 5 \cdot 4 - 10 \cdot 3 = -10$.

- (2) se una colonna C_i della matrice A si scrive come somma $C_i = C'_i + C''_i$, si ha

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C'_i + C''_i & \dots & C_n \end{pmatrix} = \\ = \det \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C'_i & \dots & C_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C''_i & \dots & C_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, la seconda colonna si scrive come somma $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

come può essere verificato calcolando i determinanti (si ottiene $-2 = -5 + 3$).

- (3) se A' si ottiene da A scambiando tra loro due colonne, allora $\det(A') = -\det(A)$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ è la matrice ottenuta da A scambiando tra loro la prima e la seconda colonna, ho $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$ e $\det(A') = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = +2$.

Omettiamo la dimostrazione di queste tre proprietà.

Come ultima proprietà del determinante, citiamo senza dimostrarlo il seguente

Teorema 6.17. (di Binet) Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ due matrici quadrate. Allora

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Ad esempio, sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Allora si ha $AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$, e si vede che $\det(A) = -2$, $\det(B) = 5$ e $\det(AB) = -10 = (-2) \cdot 5$, concordemente con il teorema di Binet.

Come corollario del teorema di Binet, abbiamo che se A è una matrice invertibile, allora

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad (6.44)$$

Infatti, basta applicare il teorema di Binet al caso $B = A^{-1}$: allora abbiamo

$$\det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$$

ovvero, tenuto conto che $AA^{-1} = I_n$,

$$\det(I_n) = \det(A) \det(A^{-1})$$

Ma la matrice identica I_n è una matrice del tipo (6.43), con $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tutti uguali a 1, quindi il suo determinante è 1. In definitiva, si ottiene

$$1 = \det(A) \det(A^{-1})$$

che implica subito la (6.44).

Vediamo ora un'applicazione del determinante e più precisamente della formula (6.36) per l'inversa che ci fornisce un modo alternativo alla riduzione a gradini per risolvere i sistemi di equazioni lineari sotto certe ipotesi.

A tale scopo, osserviamo prima che un generico sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (6.45)$$

può essere riscritto in forma molto più concisa grazie al prodotto di matrici.

Più precisamente, se denotiamo con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ la matrice dei coefficienti del sistema, con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice (costituita da

una sola colonna) che ha come entrate le incognite, e con $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ la

matrice (sempre costituita da una sola colonna) che ha come entrate i termini noti del sistema si ha, svolgendo il prodotto righe per colonne, che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

E quindi il sistema (6.45) può essere riscritto

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ovvero nella semplice forma

$$Ax = b. \quad (6.46)$$

Ora, supponiamo che la matrice A dei coefficienti del sistema sia quadrata di ordine n (quindi il sistema ha n equazioni e n incognite) e che abbia determinante diverso da zero. Allora A è invertibile e possiamo moltiplicare entrambi i membri dell'uguaglianza (6.46) a sinistra per l'inversa A^{-1} :

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

Tenendo conto che il prodotto di matrici gode della proprietà associativa, questo può essere riscritto come

$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$$

ovvero, visto che per definizione di inversa $A^{-1}A = I_n$,

$$I_n x = A^{-1}b$$

e quindi, essendo I_n elemento neutro per il prodotto,

$$x = A^{-1}b \quad (6.47)$$

Quindi la soluzione x di un sistema con stesso numero di equazioni e di incognite e matrice dei coefficienti con determinante diverso da zero può essere trovata mediante la (6.47).

Osservazione 6.18. Si noti che non abbiamo fatto altro che applicare gli stessi passaggi, normalmente sottointesi, che si applicano quando si vuole risolvere una semplice equazione di primo grado in una sola incognita $ax = b$. Infatti, ad esempio, se dobbiamo risolvere $2x = 3$ dividiamo entrambi i membri per 2, ovvero equivalentemente moltiplichiamo per l'inverso $\frac{1}{2}$ di 2 ottenendo $\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}3 = \frac{3}{2}$; per la proprietà associativa a primo membro si ha $(\frac{1}{2}2)x = \frac{3}{2}$ ovvero, essendo $\frac{1}{2}2 = 1$, si ha $1x = \frac{3}{2}$ cioè, essendo 1 elemento neutro per la moltiplicazione tra numeri, $x = \frac{3}{2}$, che è la soluzione dell'equazione.

L'unica differenza con il caso dei sistemi $Ax = b$ è che non sempre A è invertibile, mentre, a meno che a non sia zero, nell'equazione $ax = b$ tale ipotesi è sempre garantita.

Ora, se combiniamo la (6.47) con la formula per l'inversa (6.36), vediamo che la soluzione di un sistema con n equazioni e n incognite e matrice dei coefficienti invertibile è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ & & \ddots & \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (6.48)$$

Quindi, come si vede, le componenti x_i della soluzione del sistema si ottengono moltiplicando le righe della matrice dei cofattori (divisa per il determinante di A) per la colonna dei termini noti:

$$x_1 = \frac{b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \dots + b_n C_{n1}}{\det(A)}$$

$$x_2 = \frac{b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \cdots + b_n C_{n2}}{\det(A)}$$

$$\vdots$$

e in generale

$$x_i = \frac{b_1 C_{1i} + b_2 C_{2i} + \cdots + b_n C_{ni}}{\det(A)} \quad (6.49)$$

Ora, se confrontiamo il numeratore della (6.49) con l'espressione del determinante di A calcolato con lo sviluppo di Laplace rispetto alla i -esima colonna

$$\det(A) = a_{1i} C_{1i} + a_{2i} C_{2i} + \cdots + a_{ni} C_{ni}$$

vediamo che l'unica differenza è che al posto degli elementi $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ della colonna i -esima di A abbiamo i termini noti $b_1, b_2, \dots, b_n$: in altre parole, tale numeratore coincide con lo sviluppo di Laplace del determinante della matrice che si ottiene da A sostituendo i termini noti al posto della i -esima colonna.

Riassumendo, abbiamo dimostrato il

Teorema 6.19. (Teorema di Cramer) Sia $Ax = b$ un sistema di n equazioni lineari in n incognite, con $\det(A) \neq 0$ (cioè A è invertibile). Allora tale sistema ha un'unica soluzione $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le cui componenti sono date da

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, n$$

dove B_i è la matrice che si ottiene da A sostituendo la colonna dei termini noti b al posto della i -esima colonna di A .

Esempio 6.20. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dei coefficienti del sistema ha determinante $\det(A) = -3$, quindi è invertibile e possiamo applicare il metodo di Cramer, ovvero abbiamo le componenti dell'unica soluzione date da

$$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$$

$$x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(A)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Osservazione 6.21. Quanto visto finora ci permette di tracciare un parallelo tra il comportamento delle soluzioni di un sistema $Ax = b$ di n equazioni lineari in n incognite e il comportamento delle soluzioni di un'equazione congruenziale $ax \equiv_n b$, descritto nei Teoremi 3.23 e 3.24.

Infatti, in tali risultati abbiamo visto che $ax \equiv_n b$ ha soluzioni se e solo se il massimo comune divisore d di a e n divide b , e in tal caso le soluzioni *distinte modulo n* sono esattamente d (si veda quanto detto a pagina 106).

Da ciò si evince che nel caso in cui il massimo comune divisore d di a e n sia 1, la soluzione esiste qualunque sia b (1 divide qualunque b) ed è unica; ma $d = 1$ significa che a e n sono primi tra loro, il che a sua volta equivale a dire, come visto a pagina 99, che a è invertibile modulo n . Possiamo allora ulteriormente riassumere quanto appena detto riformulandolo come segue: se a è invertibile modulo n , l'equazione $ax \equiv_n b$ ha una sola soluzione qualunque sia b , mentre se a non è invertibile (ovvero il massimo comune divisore d di a e n è maggiore di 1) allora la soluzione non esiste per certi valori di b (quelli per cui d non divide b), e per i valori per cui esiste sicuramente non è unica (come abbiamo detto, ci sono d soluzioni).

Ora, un sistema lineare $Ax = b$ di n equazioni in n incognite si comporta esattamente allo stesso modo: se la matrice A è invertibile, allora la soluzione esiste qualunque sia b ed è unica, data come abbiamo visto sopra da $x = A^{-1}b$ (alternativamente, se A è invertibile il suo rango r è uguale a n e quindi dopo la riduzione a gradini non si annulla nessuna riga, il che comporta che non possiamo mai ottenere un'incompatibilità del tipo $0 = c$ con $c \neq 0$, quindi la soluzione esiste qualunque sia la colonna dei termini noti b , ed è unica in quanto il rango r è uguale al numero n di incognite, come afferma la Proposizione 5.8).

Invece, se A non è invertibile, il suo rango r è minore di n e quindi dopo la sua riduzione a gradini si annulla almeno una riga: questo comporta che per certe scelte della colonna dei termini noti b si otterrà in corrispondenza della riga annullata un'uguaglianza del tipo $0 = c$ con $c \neq 0$, ovvero per certi b non avremo soluzione; d'altra parte, per i b per cui abbiamo soluzione, questa non sarà certamente unica, in quanto come sappiamo le soluzioni di un sistema compatibile sono ∞^{n-r} (sempre per la Proposizione 5.8), e essendo r per ipotesi minore di n perché A non è invertibile, $n - r$ non sarà zero e quindi le soluzioni saranno infinite.

Oltre al prodotto, tra matrici può essere definita anche un'operazione di somma.

L'introduzione di tale operazione si rivela necessaria se vogliamo manipolare espressioni e uguaglianze tra matrici esattamente come manipoliamo espressioni e uguaglianze tra numeri: ad esempio, come abbiamo già messo in evidenza in capitoli precedenti, se data l'uguaglianza tra numeri $ab = ac$ portiamo a primo membro ac cambiandolo di segno e ottenendo $ab - ac = 0$ e poi mettiamo in evidenza a ottenendo $a(b - c) = 0$ stiamo sfruttando il fatto che tra numeri è definita un'operazione di somma per la quale valgono la proprietà associativa, l'esistenza di un elemento neutro, l'esistenza di un inverso e la proprietà distributiva: infatti, per spostare ac a primo membro stiamo in realtà sommando entrambi i membri di $ab = ac$ per l'inverso additivo (ovvero l'opposto) di ac , cioè $-ac$, ottenendo $ab + (-ac) = ac + (-ac) = 0$, ovvero $ab - ac = 0$, e poi per mettere in evidenza a sfruttiamo la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto.

Allo scopo di poter eseguire manipolazioni analoghe anche nelle espressioni tra matrici, definiamo la *somma di due matrici* $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, denotata $A + B$, come la matrice di $M_{m,n}(\mathbb{K})$ la cui entrata di posto ij è ottenuta sommando le entrate di posto ij di A e B , ovvero

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Ad esempio, siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Allora

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 & 3+(-2) \\ 4+3 & 5+1 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

La somma di matrici così definita ha, tra le altre, proprio le proprietà desiderate citate sopra:

- (1) vale la proprietà commutativa, ovvero $A + B = B + A$
- (2) vale la proprietà associativa, ovvero $(A + B) + C = A + (B + C)$
- (3) esiste un elemento neutro, dato dalla matrice che ha tutte le entrate nulle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

In ogni insieme $M_{m,n}(\mathbb{K})$, chiameremo *matrice nulla* la matrice che ha tutte le entrate uguali a zero.

- (4) ogni matrice A ha un'inversa additiva o opposta, data dalla matrice che ha come entrata di posto ij l'opposto dell'entrata di posto ij di A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (5) vale la proprietà distributiva rispetto al prodotto, ovvero se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B, C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, si ha $A(B + C) = AB + AC$ e analogamente se $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, si ha $(A + B)C = AC + BC$.

Quindi, se abbiamo ad esempio un'uguaglianza tra matrici $AB = AC$, possiamo eseguire gli stessi passaggi che eseguiamo tra numeri: $AB - AC = 0$ (dove 0 denota la matrice nulla) e $A(B - C) = 0$.

Osservazione 6.22. Si noti che da un'uguaglianza come l'ultima appena scritta, $A(B - C) = 0$, non possiamo però dedurre $A = 0$ o $B - C = 0$ come faremmo per un'uguaglianza numerica: il motivo è che il prodotto di matrici *non* gode della cosiddetta "proprietà di annullamento del prodotto", ovvero può capitare che il prodotto di due matrici sia la matrice nulla senza che lo sia nessuna delle due: ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ricordiamo che abbiamo già visto altri contesti in cui tale proprietà non vale, ad esempio per il prodotto tra classi nell'aritmetica modulare (si veda pagina 99).

Avendo visto le operazioni di prodotto e somma tra matrici, che sono operazioni *binarie* in quanto ci danno una matrice come risultato di un'operazione tra due matrici, concludiamo vedendo un'operazione *unaria* che ci dà una nuova matrice a partire da una sola data⁶, l'operazione di *trasposta di una matrice*.

Data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, definiamo la sua trasposta, denotata ${}^tA$, come la matrice che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne. Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \implies {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

⁶Ad esempio, in algebra booleana le operazioni di $\wedge$ e $\vee$ sono operazioni binarie in quanto ci danno una nuova proposizione (rispettivamente $P \wedge Q$ e $P \vee Q$) a partire da due proposizioni P e Q date, mentre $\neg$ è un'operazione unaria che ci dà una nuova proposizione $\neg P$ a partire da una sola proposizione P data.

In pratica, in seguito allo scambio gli elementi di A che si trovavano nella riga i e colonna j si vengono a trovare sulla riga j e colonna i : le entrate della matrice trasposta sono quindi definite da

$$({}^T A)_{ij} = A_{ji}$$

L'importanza della trasposta consiste nel fatto che il suo utilizzo consente una più agevole manipolazione di alcune espressioni: ad esempio, il prodotto scalare $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ tra due terne (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) che, come abbiamo visto nel capitolo precedente serve per calcolare l'angolo tra due vettori dati rispetto a un sistema di riferimento ortonormale, può essere riscritto usando il prodotto di matrici e la trasposta: più precisamente, se

denotiamo con x la matrice con una sola colonna $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ costituita dalle componenti della prima terna e analogamente con y la matrice con una sola colonna $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ costituita dalle componenti della seconda terna, il prodotto scalare tra le due terne coincide con il prodotto righe per colonne tra le matrici

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

che non è nient'altro che il prodotto righe per colonne ${}^T x y$ tra la trasposta ${}^T x$ di x e y . Come vedremo nel prossimo capitolo, scrivere il prodotto scalare in questa forma avrà vari vantaggi, ad esempio quando si vuole determinare quali matrici rappresentano trasformazioni rigide dello spazio (ovvero trasformazioni che non modificano lunghezze e angoli). Avremo allora bisogno di conoscere le proprietà della trasposta, tra cui le più importanti sono le seguenti.

$$(1) \quad {}^T(A + B) = {}^T A + {}^T B$$

$$(2) \quad {}^T(AB) = {}^T B {}^T A$$

$$(3) \quad {}^T({}^T A) = A$$

$$(4) \quad \det({}^T A) = \det(A)$$

Non dimostriamo tali proprietà, ma limitiamoci a illustrare con un esempio la (2), allo scopo di mettere in evidenza l'ordine invertito delle trasposte a

secondo membro: sia ad esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ allora si ha $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e quindi ${}^T(AB) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Dall'altra, si ha ${}^T A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, ${}^T B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e ${}^T B {}^T A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, uguale a ${}^T(AB)$ come previsto dalla proprietà (2), mentre si vede subito che ${}^T A {}^T B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, diverso da ${}^T(AB)$.

Osservazione 6.23. Un'ultima operazione riguardante le matrici, spesso usata nel fare i conti, è il prodotto di un elemento del campo numerico $\mathbb{K}$ per una matrice: più precisamente, dato $c \in \mathbb{K}$ e una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, si definisce cA come la matrice che si ottiene moltiplicando ogni entrata di A per c (abbiamo usato implicitamente tale operazione nella formula 6.36 per l'inversa quando abbiamo moltiplicato la matrice dei cofattori per il numero $\frac{1}{\det(A)}$).

Segnaliamo, senza dimostrarle, le seguenti proprietà di tale operazione rispetto a quelle di somma e prodotto di matrici definite sopra:

$$c(A + B) = cA + cB \quad (6.50)$$

$$A(cB) = c(AB) \quad (6.51)$$