

6.3 Invertibilità e determinante di una matrice

In questo paragrafo introdurremo uno strumento di calcolo alternativo alla riduzione a gradini per determinare se una matrice quadrata A è invertibile e, nel caso, determinarne l'inversa, detto *determinante*.

Come vedremo, il determinante è una funzione che associa a ogni matrice A quadrata di ordine n con entrate appartenenti un campo $\mathbb{K}$ un elemento di $\mathbb{K}$, calcolato usando le entrate di A , e con la proprietà che A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$; dal momento che, come visto nel paragrafo precedente, una matrice è invertibile esattamente quando le sue righe sono indipendenti, questo equivale a dire che $\det(A) = 0$ se e solo se le righe della matrice sono dipendenti.

Prima di dare la definizione generale, mostriamo che nel caso di matrici di ordine 2 e di ordine 3 non è difficile trovare una funzione delle entrate che sia nulla se e solo se le righe della matrice sono dipendenti.

Infatti, data una generica matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

di ordine 2, essendoci solo due righe queste saranno dipendenti se e solo se sono proporzionali: questa proporzionalità, supponendo per il momento che a_{21} e a_{22} siano entrambi diversi da zero, significa che

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad (6.27)$$

ovvero, moltiplicando entrambi i membri per a_{21} (così da semplificarlo a primo membro) e per a_{22} (così da semplificarlo a secondo),

$$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$$

Portando tutto a primo membro, si ottiene

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (6.28)$$

che ci dà, come volevamo, una funzione delle entrate della matrice che si annulla esattamente quando le righe sono dipendenti.

Si noti che la (6.28) ci dice che le righe sono dipendenti anche senza l'ipotesi, che era necessaria per poter scrivere la (6.27), che a_{21} e a_{22} fossero entrambi diversi da zero: infatti, se ad esempio $a_{21} = 0$ allora la (6.28) diventa $a_{11}a_{22} = 0$, che equivale a dire che o $a_{11} = 0$ o $a_{22} = 0$: ma nel primo caso la matrice

è della forma $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, nel secondo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e in entrambi i casi otteniamo sempre che le righe sono proporzionali.

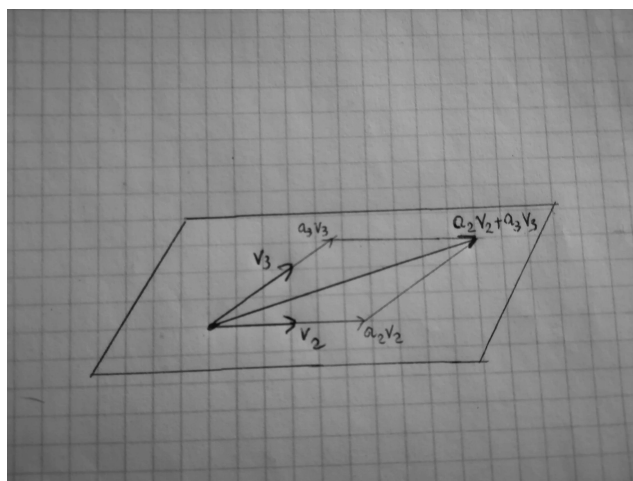
Anche per matrici di ordine 3 non è difficile ottenere, aiutandosi con un'interpretazione geometrica, una funzione delle entrate che si annulli se e solo se le righe sono dipendenti. Infatti, sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Possiamo pensare che le righe R_1, R_2, R_3 della matrice rappresentino le terne delle coordinate di tre vettori geometrici applicati v_1, v_2, v_3 nello spazio rispetto a un sistema di riferimento ortonormale.

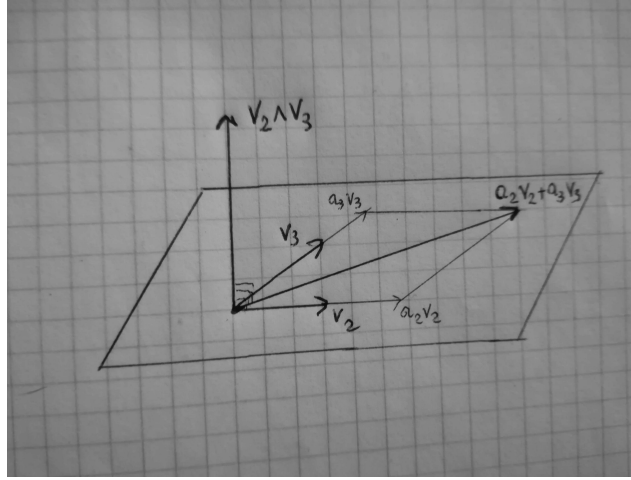
Poiché come sappiamo alla somma di vettori corrisponde la somma delle loro coordinate, e al prodotto di un vettore per un numero c corrisponde il prodotto della terna delle coordinate moltiplicata per c (Osservazione 4.7), e dal momento che le relazioni di dipendenza si ottengono mediante somme e multipli, si ha che esiste una relazione di dipendenza tra R_1, R_2, R_3 se e solo se la stessa relazione di dipendenza vale tra i vettori corrispondenti (ad esempio, $R_3 = R_1 + R_2$ se e solo se $v_3 = v_1 + v_2$, oppure $R_1 = 2R_2 - R_3$ se e solo se $v_1 = 2v_2 - v_3$ etc.).

Ora, se esistesse una relazione di dipendenza tra i vettori questo vorrebbe dire che essi stanno sullo stesso piano: ad esempio, se $v_1 = a_2v_2 + a_3v_3$ allora v_1 sarebbe sullo stesso piano su cui stanno v_2 e v_3 in quanto una qualunque combinazione di v_2 e v_3 appartiene a tale piano



Ma stare sul piano su cui stanno v_2 e v_3 significa essere perpendicolare al

prodotto vettoriale $v_2 \wedge v_3$, che come sappiamo è perpendicolare a entrambi e quindi a qualunque altro vettore si trovi su quel piano.



Traduciamo allora tale condizione in coordinate. Assumendo, come abbiamo detto sopra, che le coordinate di v_1, v_2, v_3 siano date rispettivamente da prima, seconda e terza riga della matrice, ovvero $v_1 \equiv (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $v_2 \equiv (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $v_3 \equiv (a_{31}, a_{32}, a_{33})$, abbiamo in base alla definizione di prodotto vettoriale che

$$v_2 \wedge v_3 \equiv (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

e, ricordando che due vettori $v \equiv (x, y, z)$ e $v' \equiv (x', y', z')$ sono perpendicolari se e solo se $xx' + yy' + zz' = 0$, si ha che v_1 è perpendicolare a $v_2 \wedge v_3$ (ovvero sta sullo stesso piano su cui stanno v_2 e v_3) se e solo se

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = 0 \quad (6.29)$$

ovvero, svolgendo i calcoli,

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = 0 \quad (6.30)$$

Come volevamo, abbiamo quindi ottenuto anche nel caso di matrici di ordine 3 una funzione delle entrate che si annulla se e solo se le sue righe sono dipendenti.

Ora, notiamo che i primi membri sia dell'espressione (6.28) che della (6.30) sono somma (con segno + o -) di addendi del tipo

$$a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)} \quad (6.31)$$

dove $p(1), p(2), \dots, p(n)$ è una permutazione degli indici di colonna. Ad esempio, nella (6.30) abbiamo che

l'addendo $a_{11}a_{22}a_{33}$ è del tipo $a_{1p(1)}a_{2p(2)}a_{3p(3)}$ con p data dalla permutazione $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3$

l'addendo $a_{11}a_{23}a_{32}$ è del tipo $a_{1p(1)}a_{2p(2)}a_{3p(3)}$ con p data dalla permutazione $p(1) = 1, p(2) = 3, p(3) = 2$

l'addendo $a_{12}a_{23}a_{31}$ è del tipo $a_{1p(1)}a_{2p(2)}a_{3p(3)}$ con p data dalla permutazione $p(1) = 2, p(2) = 3, p(3) = 1$

l'addendo $a_{12}a_{21}a_{33}$ è del tipo $a_{1p(1)}a_{2p(2)}a_{3p(3)}$ con p data dalla permutazione $p(1) = 2, p(2) = 1, p(3) = 3$

l'addendo $a_{13}a_{21}a_{32}$ è del tipo $a_{1p(1)}a_{2p(2)}a_{3p(3)}$ con p data dalla permutazione $p(1) = 3, p(2) = 1, p(3) = 2$

l'addendo $a_{13}a_{22}a_{31}$ è del tipo $a_{1p(1)}a_{2p(2)}a_{3p(3)}$ con p data dalla permutazione $p(1) = 3, p(2) = 2, p(3) = 1$

Analogamente, nella (6.28) abbiamo che

l'addendo $a_{11}a_{22}$ è del tipo $a_{1p(1)}a_{2p(2)}$ con p data dalla permutazione $p(1) = 1, p(2) = 2$

l'addendo $a_{12}a_{21}$ è del tipo $a_{1p(1)}a_{2p(2)}$ con p data dalla permutazione $p(1) = 2, p(2) = 1$

In entrambi i casi, si vede che abbiamo un addendo per ognuna delle possibili permutazioni degli indici di colonna (nel caso di ordine 2 abbiamo due sole permutazioni dell'insieme $\{1, 2\}$, nel caso di ordine 3 abbiamo 6 permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3\}$), mentre, per quello che riguarda il segno davanti a tali addendi, possiamo notare che sia nella (6.28) che nella (6.30) gli addendi che corrispondono a permutazioni pari (si veda da Definizione 2.33) hanno davanti un segno $+$, mentre quelli dati da permutazioni dispari hanno davanti un segno $-$: ad esempio, l'addendo $a_{11}a_{22}$ ha segno $+$ perché corrisponde alla permutazione identica, che è pari; mentre l'addendo $a_{12}a_{21}$ ha segno $-$ perché corrisponde alla trasposizione che scambia 1 e 2, che è una permutazione dispari; analogamente, nella (6.30) l'addendo $a_{11}a_{22}a_{33}$ ha segno $+$ perché corrisponde alla permutazione identica, l'addendo $a_{11}a_{23}a_{32}$ ha segno $-$ perché

corrisponde alla trasposizione che scambia 2 e 3, l'addendo $a_{12}a_{23}a_{31}$ ha segno $+$ perché corrisponde al ciclo di lunghezza tre $(1\ 2\ 3)$, che si può ottenere tramite la composizione $(1\ 3) \circ (1\ 2)$ di due trasposizioni, e quindi è pari, e così via.

Se allora per ogni permutazione $p \in S_n$ definiamo il cosiddetto *segno di p* ponendo $s(p) = +1$ se p è pari e $s(p) = -1$ se p è dispari, vediamo che sia la (6.28) che la (6.30) possono essere scritte come

$$\sum_{p \in S_n} s(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)} \quad (6.32)$$

rispettivamente per $n = 2$ e $n = 3$.

Quello che si può dimostrare è che, anche per matrici di ordine $n > 3$ si ha che tale espressione si annulla se e solo se le righe della matrice sono dipendenti. Possiamo allora finalmente dare la seguente

Definizione 6.10. Data una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$, il suo determinante $\det(A)$ è l'elemento di $\mathbb{K}$ dato dalla (6.32).

Notiamo che la (6.32) ha tanti addendi quante sono le possibili permutazioni degli n indici di colonna che, come sappiamo dal Paragrafo 2.4, sono date dal fattoriale $n!$: per le matrici di ordine 4, si ha $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, per quelle di ordine 5 si ha $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, quindi vediamo che il numero di addendi nell'espressione del determinante cresce molto rapidamente, il che rende l'uso di tale definizione non molto pratico per il calcolo.

Per questo motivo, introduciamo ora una formula che ci consente di calcolare il determinante senza dover utilizzare la (6.32), detta *sviluppo di Laplace*.

Data una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$ generico⁵ si procede come segue:

sceglie una riga $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ o una colonna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ di A , si può

dimostrare che

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \quad (6.33)$$

(se si è scelta la riga) o

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \quad (6.34)$$

(se si è scelta la colonna) dove, per ogni coppia di indici i e j stiamo denotando con C_{ij} il cosiddetto *cofattore* (o *complemento algebrico*) di a_{ij} , definito da

⁵Per le matrici di ordine 1, cioè $A = (a_{11})$, si pone semplicemente $\det(A) = a_{11}$.

$C_{ij} :=$ determinante della matrice che si ottiene da A cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$.

Le formule (6.33) e (6.34) si dicono rispettivamente *sviluppo di Laplace rispetto alla i -esima riga* e *sviluppo di Laplace rispetto alla j -esima colonna*.

Il fatto fondamentale, che non dimostriamo, è che il risultato di queste formule è sempre $\det(A)$ indipendentemente dalla riga o dalla colonna scelta.

Ad esempio, nel caso di una matrice di ordine 3, scegliendo la prima riga di

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ si ha}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

che svolgendo i calcoli coincide proprio con la (6.30)

Osserviamo che lo sviluppo di Laplace è una formula *ricorsiva*, in quanto prevede che per calcolare il determinante di A (che è una matrice di ordine n) si debbano conoscere i cofattori, che sono determinanti di matrici di ordine $n - 1$ (quelle che si ottengono cancellando una riga e una colonna da A); a loro volta, ciascuno di questi determinanti va calcolato con la stessa formula, riducendoli al calcolo di determinanti di matrici di ordine $n - 2$ e così via fino ad arrivare a determinanti di matrici di ordine 2, per i quali si ha la semplice formula $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Vediamo subito un esempio:

Esempio 6.11. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Scegliamo di sviluppare il de-

terminante rispetto alla terza riga, usando cioè la formula (6.33) nel caso $i = 3$:

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + a_{34}C_{34}.$$

Per definizione di cofattori e tenendo conto che $a_{32} = a_{33} = 0$ (e quindi non abbiamo bisogno di calcolare i corrispondenti cofattori) si ha

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.35)$$

Ora, ciascuno dei due determinanti di ordine 3 che compaiono in questa uguaglianza va di nuovo calcolato usando la formula data. Ad esempio, se per il primo determinante scegliamo la terza colonna (quindi dobbiamo usare $\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$) tenendo conto che $a_{13} = a_{33} = 0$, si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

dove il determinante di ordine 2 è stato calcolato usando la formula $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Analogamente, se per l'altro determinante scegliamo la prima riga (quindi dobbiamo usare $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$) tenendo conto che $a_{13} = 0$, si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Sostituendo questi risultati nella (6.35), si trova allora

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{3+1}(-1) + 1 \cdot (-1)^{3+4} 2 = -3.$$

Ora, le nozioni di determinante e cofattore appena introdotte, oltre a dirci se una matrice è invertibile, ci danno un modo alternativo al procedimento descritto nel paragrafo precedente per calcolarne l'inversa. Infatti, si ha il seguente risultato, che non dimostriamo:

Proposizione 6.12. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice invertibile (ovvero con $\det(A) \neq 0$). Allora la sua inversa A^{-1} è data da

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

dove C_{ij} indica, come sopra, il cofattore di a_{ij} , e $\frac{1}{\det(A)}$ davanti alla matrice dei cofattori significa che ogni entrata di tale matrice deve essere moltiplicata per $\frac{1}{\det(A)}$.

Osservazione 6.13. A proposito della disposizione dei cofattori nella (6.36), si noti che i cofattori delle entrate della prima *riga* di A sono nella prima *colonna* della (6.36), i cofattori delle entrate della seconda *riga* di A sono nella seconda *colonna* della (6.36), e così via.

Esempio 6.14. Calcoliamo l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

I cofattori sono

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1, \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 3, \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3.$$

Quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

dove il determinante di A è stato calcolato sviluppandolo secondo Laplace rispetto alla terza riga, usando i cofattori già calcolati:

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = -3$$

Osservazione 6.15. Osserviamo che la (6.36), nel caso $n = 2$, diventa la semplice formula

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

in quanto i cofattori sono semplicemente $C_{11} = (-1)^{1+1}a_{22}$, $C_{12} = (-1)^{1+2}a_{21}$, $C_{21} = (-1)^{2+1}a_{12}$, $C_{22} = (-1)^{2+2}a_{11}$ (ricordiamo che il determinante di una matrice di ordine 1 si definisce come il valore della sua unica entrata). In pratica, a parte dividere per il determinante, la matrice inversa si ottiene scambiando tra loro i due elementi sulla diagonale e cambiando di segno le restanti entrate.