

Esercizi per il Corso di MATEMATICA DISCRETA

Foglio 9

29 novembre 2019

1. Per ognuna delle seguenti applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (dove m e n sono implicitamente determinati dal numero di coordinate) si trovi la matrice associata (rispetto alle basi canoniche in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$).

$$(a) \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ z + 2y \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4w + y - 2z \\ 3z - y - x \\ y + 2x \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y - 2x \\ y + x \\ y - x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -z + 2y + x \\ x + z \end{pmatrix}$$

2. Si trovino le matrici associate alle composizioni: $h \circ f$, $g \circ h$, $k \circ h$, $f \circ k$ and $g \circ k \circ h \circ f$.
3. Per ognuna delle seguenti matrici, si scriva l'espressione generale della trasformazione lineare $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ corrispondente (dove m e n sono determinati dal numero di righe e colonne della matrice A).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Si considerino le matrici A , B , C e D dell'esercizio 2.
- (a) Prendendo le lettere A , B , C e D , quante parole (con possibili ripetizioni) di due lettere si possono scrivere?
 - (b) Quante di queste parole corrispondono ad un vero prodotto di matrici?
 - (c) Si calcolino tutti prodotti di matrici dati dalle parole ottenute in (b).
 - (d) Si scrivano le espressioni delle trasformazioni lineari associate alle matrici ottenute in (c).
5. Sia A una matrice $n \times n$.
- (a) A si dice una matrice diagonale se le sue entrate a_{ij} sono zero quando $i \neq j$. Si dimostri che se A è diagonale, allora il rango di A coincide col numero di entrate diverse da zero.
 - (b) Si concluda che se A è diagonale, allora A è invertibile se e solo se la diagonale principale di A (cioè, le entrate a_{ii} per i fra 1 e n) sono diverse da zero.

(c) Si dimostri che il prodotto di due matrici diagonali è diagonale.

(d) Supponiamo che A sia una matrice diagonale invertibile. Si dimostri che la sua matrice inversa è la matrice diagonale B , $n \times n$, tale che le sue entrate soddisfano $b_{ii} = a_{ii}^{-1}$.

6. Per $k \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ k & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini per quali valori di k la matrice A non è invertibile.

(b) Per $k = 0$, si calcoli la matrice inversa di A .

Alcuni risultati del Foglio 7

1. Visto che $\mathbb{Z}_6$ ha finiti elementi, queste funzioni sono iniettive se e solo se sono suriettive (e quindi biiettive). Lo sono $f = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$, $g = (0 \ 2 \ 4)(1 \ 3 \ 5)$ e $i = (1 \ 5)(2 \ 4)$

2. (a) $\theta = \pi/4 = 45^\circ$ (b) $k = -1/2$

3. (a) $r: \begin{cases} x = -a \\ y = 3 + 2a \end{cases}$ (b) $s: \begin{cases} x = 2 + a \\ y = -1 + 6a \end{cases}$ (c) $r: 2x + y = 3$
 $s: 6x - y = 13$ (d) $t: x - 3y = -3$

4. (a+e) $r: \begin{cases} x = -1 + a \\ y = 2a \\ z = 2 + 3a \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = -2 \\ x + y - z = -3 \end{cases}$

(b+e) $\pi: \begin{cases} x = -1 - a - b \\ y = -a \\ z = -1 + 3a + 2b \end{cases} \iff 2x - 11y - 3z = -3$

(c+e) $s: \begin{cases} x = 3a \\ y = 2 - a \\ z = -1 + 3a \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 1 \\ x + 3a = 6 \end{cases}$

(d+e) $\sigma: \begin{cases} x = -1 + 3a + 5b \\ y = 2 - 5a - 2b \\ z = 2 - 3a \end{cases} \iff 6x + 15y - 19z = -14$

(f) $\delta: 3x - 2y + 6z = -3$ (g) $k = -25/3$

5. (a) No. (b) Ad esempio $R \equiv (0, 0, 0)$, $S \equiv (1, 1, 0)$.

(c) $\sigma: \begin{cases} x = 2a + b \\ y = a + b \\ z = -2a \end{cases} \iff 2x - 2y + z = 0$ (d) $\sigma \cap \pi: \begin{cases} y = x + z \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$