

Esercizi per il Corso di MATEMATICA DISCRETA

Foglio 7

15 novembre 2019

1. Si considerino le seguenti funzioni

$$f: \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6, \quad f([x]) = [x] + [1]$$

$$g: \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6, \quad g([x]) = [x] + [2]$$

$$h: \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6, \quad h([x]) = [3][x]$$

$$i: \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6, \quad i([x]) = [5][x]$$

$$j: \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6, \quad j([x]) = [2][x]$$

- (a) Quali delle funzioni sono iniettive? Si giustifichi la risposta.
- (b) Quali delle funzioni sono suriettive? Si giustifichi la risposta.
- (c) Quali delle funzioni sono biiettive? Si giustifichi la risposta.
- (d) Per ognuna delle funzioni biiettive sopra elencate, si scriva la corrispondente permutazione come prodotto di cicli disgiunti.

2. Si fissi una base B nello spazio e si considerino i seguenti vettori

$$\vec{OP} \equiv (2, 2, -1) \quad \vec{OQ} \equiv (1, 0, -1) \quad \vec{OR} \equiv (k, 1, 1)$$

dove k è un numero reale.

- (a) Si determini l'angolo fra $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$.
 - (b) Si determini un valore di k tale che $\vec{OR}$ sia perpendicolare a $\vec{OP}$.
3. Sia B una base ortonormale fissata per i vettori nel piano. In tutte le seguenti domande, lavoriamo con coordinate rispetto alla base B .
- (a) Si trovino le equazioni parametriche della retta r che contiene il punto $P_0 \equiv (0, 3)$ e che è parallela alla retta che contiene il vettore $\vec{OQ} \equiv (-1, 2)$.
 - (b) Si trovino le equazioni parametriche della retta s che contiene i punti R e S dati per le coordinate $R \equiv (2, -1)$, $S \equiv (3, 5)$.
 - (c) Si trovino anche le equazioni cartesiane delle rette r e s .
 - (d) Si trovi l'equazione cartesiana della retta t che contiene il punto $K \equiv (3, 2)$ e che è perpendicolare alla retta che contiene il vettore $\vec{ON} \equiv (-1, 3)$.
4. Sia B una base ortonormale fissata per i vettori nello spazio. In tutte le seguenti domande, lavoriamo con coordinate rispetto alla base B .
- (a) Si trovino le equazioni parametriche della retta r che contiene il punto $P_0 \equiv (-1, 0, 2)$ e che è parallela a $\vec{OQ} \equiv (1, 2, 3)$, mentre è contenuta nel piano che contiene sia il vettore $\vec{OQ}$ che il punto P_0 .
 - (b) Si trovino le equazioni parametriche del piano π che contiene il punto $Q_0 \equiv (-1, 0, 2)$ e che è parallelo al piano che contiene i vettori $\vec{OR} \equiv (-1, -1, 3)$ e $\vec{OS} \equiv (-1, 0, 2)$.

- (c) Si trovino le equazioni parametriche della retta s che contiene i punti T e U dati tramite le coordinate $T \equiv (0, 2, -1)$, $U \equiv (3, 1, 2)$.
 - (d) Si trovino le equazioni parametriche del piano σ che contiene i punti K , L e M dati tramite le coordinate $K \equiv (-1, 2, 2)$, $L \equiv (2, -3, -1)$, $M = (4, 0, 2)$.
 - (e) Si trovino le equazioni cartesiane delle rette r e s e dei piani π e σ .
 - (f) Si trovi l'equazione cartesiana del piano δ che contiene il punto $C \equiv (3, 0, -2)$ ed è perpendicolare al vettore $\vec{ON} \equiv (3, -2, 6)$.
 - (g) Si determini un numero reale k tale che il punto di coordinate $(k, 1, 4)$ appartenga al piano δ .
5. Sia B una base ortonormale dello spazio e sia π il piano tale che i suoi punti sono tutti i $P \equiv (x, y, z)$ (rispetto a B) per cui l'equazione $y = x + z$ è soddisfatta.
- (a) Il punto $Q \equiv (2, 1, -2)$ appartiene al piano π ?
 - (b) Si trovino due punti R e S appartenenti al piano π tali che R , S e Q non siano tutti sulla stessa retta.
 - (c) Si trovino le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana del piano σ che contiene Q , R e S .
 - (d) Si trovi la equazione cartesiana della retta che risulta dalla intersezione di questi due piani, cioè, di $\pi \cap \sigma$.

Alcuni risultati del Foglio 5

1. a) $= \frac{n(n+1)}{2} - 3$; b) $= 2^n$; c) $= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1} - 1$;
d) $= n^2(n+1)^2$; e) $= (n+1)! - 1$.
2. Sono anelli le triple d), e), f).
3. a) $(7, 1)$; b) $(-5, 2)$; c) $(-14, 6)$; d) $(9, 1)$.
4. a) $(1110011)_2$; b) $(1010110)_2$; c) $(2022)_3$; d) $(111)_6$; e) $(102)_5$; f) $(161)_7$; g) $(203)_4$.
6. a) 4; b) 11; c) 4; d) 4; e) 64; f) 24; g) 1.
8. a) 16; b) 46; c) 32; d) 800; e) 420; f) 512; g) 288.