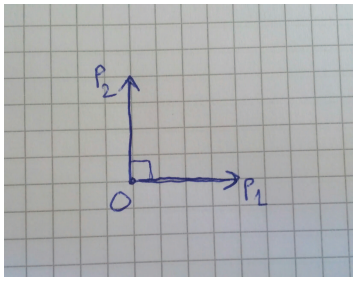
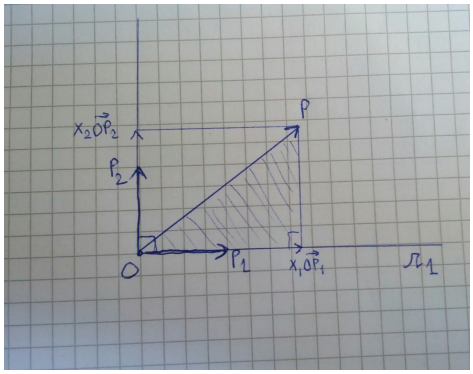
4.3 Lunghezze e angoli

Lavorare in coordinate rispetto a una base ci permette di tradurre numericamente costruzioni geometriche con i vettori e risolvere numericamente problemi relativi ai vettori. Questo è vero qualunque sia la base scelta, tuttavia a seconda del problema specifico che dobbiamo risolvere, alcune basi possono essere più convenienti di altre: questo è vero in particolare quando si vuole rispondere, lavorando in coordinate, alle domande seguenti: qual è la lunghezza di un vettore dato? qual è l'angolo tra due vettori dati?
In tal caso, le basi più convenienti da usare, come stiamo per vedere, sono quelle formate da (due nel caso del piano, tre nel caso dello spazio) vettori tra loro ortogonali e di lunghezza 1 (rispetto a un'unità di misura scelta).

Infatti, consideriamo una tale base nel piano



Ora, consideriamo un vettore $\vec{OP}$, del quale sappiamo che le coordinate rispetto a tale base sono date da (x_1, x_2) (ovvero, per definizione di coordinate, $\vec{OP} = x_1\vec{OP_1} + x_2\vec{OP_2}$): è possibile calcolare la lunghezza del vettore $\vec{OP}$ a partire dalle coordinate? Per rispondere a tale domanda, consideriamo il seguente disegno, nel quale è rappresentata la decomposizione $\vec{OP} = x_1\vec{OP_1} + x_2\vec{OP_2}$

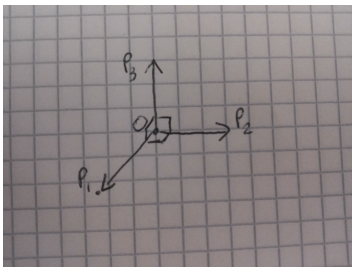


Dal momento che abbiamo scelto i vettori di base perpendicolari, quando proiettiamo P sulla retta r_1 che contiene $\vec{OP_1}$ seguendo la direzione di $\vec{OP_2}$, tale proiezione incontra r_1 con un angolo di 90 gradi, e si viene quindi a formare un triangolo rettangolo (evidenziato nel disegno) avente come ipotenusa proprio $\vec{OP}$ e al quale possiamo quindi applicare il teorema di Pitagora per calcolare la lunghezza di $\vec{OP}$, che denoteremo $|\vec{OP}|$.
A questo scopo, notiamo che il cateto orizzontale di tale triangolo è dato dal vettore $x_1\vec{OP_1}$, e quindi la sua lunghezza è data dal prodotto di x_1 per la lunghezza di $\vec{OP_1}$: ma avendo scelto i vettori di base di lunghezza unitaria, questo implica che la lunghezza di tale cateto sia semplicemente x_1; per quello che riguarda il cateto verticale, esso per costruzione ha la stessa lunghezza del vettore $x_2\vec{OP_2}$, ovvero x_2 (in quanto $\vec{OP_2}$ ha lunghezza 1). Quindi il teorema di Pitagora ci dice

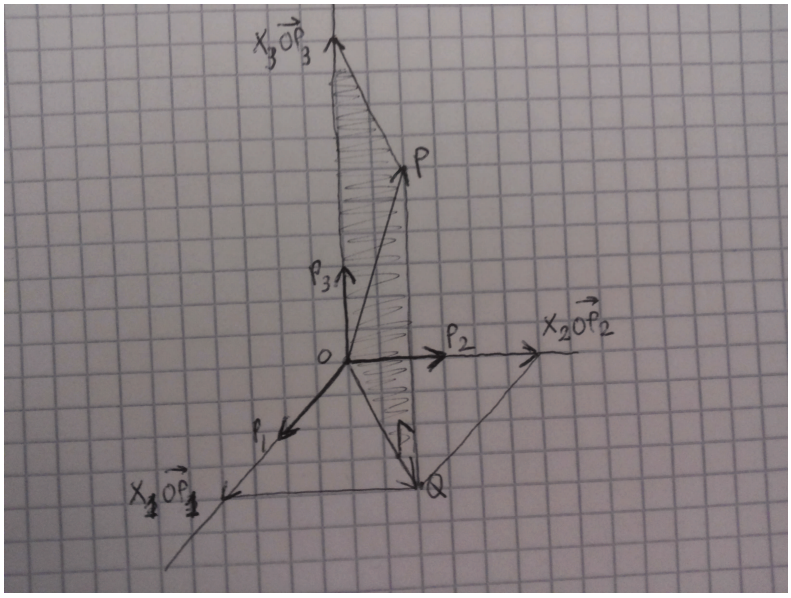
$$|\vec{OP}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{4.9}$$

che rappresenta la formula cercata, che ci dà la lunghezza di $\vec{OP}$ in funzione delle sue coordinate.
Si noti che nei ragionamenti che abbiamo fatto è stato fondamentale aver scelto una base fatta di vettori ortogonali (questo ha fatto comparire un triangolo rettangolo a cui abbiamo applicato il teorema di Pitagora) e di lunghezza 1 (che ci ha permesso di esprimere le lunghezze dei cateti in funzione delle sole coordinate).

Vediamo adesso come si ottiene una formula analoga nello spazio tridimensionale: sia $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$ una base B per i vettori applicati nello spazio tridimensionale composta di vettori ortogonali tra loro e di lunghezza 1:



Supponiamo ora di avere un vettore $\vec{OP}$ e di volerne calcolare la lunghezza, che denotiamo $|\vec{OP}|$, in funzione delle sue coordinate x_1, x_2, x_3 rispetto alla base B scelta. Per definizione di coordinate, $\vec{OP}$ si decompone come somma $\vec{OP} = x_1\vec{OP_1} + x_2\vec{OP_2} + x_3\vec{OP_3}$, come nel disegno seguente



La decomposizione è stata ottenuta graficamente come segue: prima si proietta P perpendicolarmente sul piano su cui stanno P_1 e P_2 ottenendo il punto Q (l'angolo in Q quindi è retto, come messo in evidenza nel disegno) e si ottiene un rettangolo, ombreggiato nel disegno, che ci dice che $\vec{OP} = \vec{OQ} + x_3\vec{OP}_3$; poi dal momento che $\vec{OQ}$ giace sul piano di P_1 e P_2 lo si può decomporre come $\vec{OQ} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$ (sempre ottenendo angoli retti in quanto $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ sono perpendicolari), e quindi $\vec{OP} = \vec{OQ} + x_3\vec{OP}_3 = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2 + x_3\vec{OP}_3$ come volevamo.

Ora, essendo OP ipotenusa del triangolo OPQ rettangolo in Q, per il teorema di Pitagora avremo

$$|OP|^2 = |OQ|^2 + |PQ|^2 \tag{4.10}$$

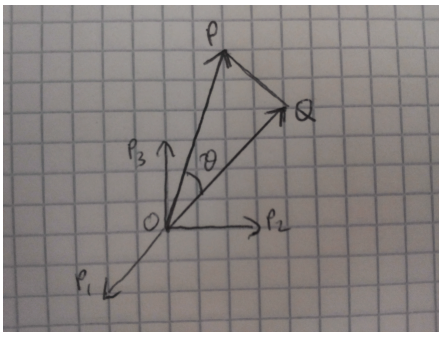
Ma da una parte, il segmento PQ, essendo un lato del rettangolo ombreggiato in figura, è lungo esattamente quanto il vettore $x_3\vec{OP}_3$, ovvero x_3 (in quanto $\vec{OP}_3$ ha lunghezza 1); dall'altra, OQ è la diagonale del rettangolo che ha come lati i vettori $x_1\vec{OP}_1$ e $x_2\vec{OP}_2$ di lunghezze rispettivamente x_1 e x_2 (in quanto $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ hanno lunghezza 1), quindi sempre per il teorema di Pitagora si ha $|OQ|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Combinando queste osservazioni con la (4.10), si ha $|OP|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, ovvero

$$|\vec{OP}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{4.11}$$

che è la formula cercata, analoga della (4.9), per la lunghezza di un vettore geometrico $\vec{OP}$ dello spazio in funzione delle sue coordinate rispetto alla base

scelta.

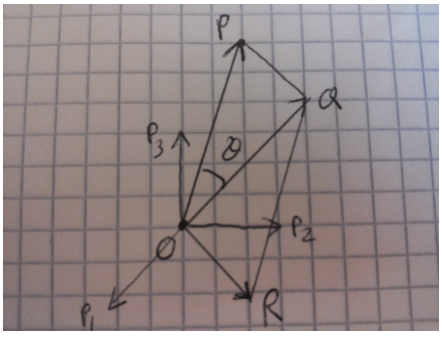
Ora, poniamoci il problema di calcolare l'angolo tra due vettori non nulli $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ una volta note le loro coordinate rispetto alla stessa base fissata sopra. Supponiamo che tali coordinate siano rispettivamente (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3).
Consideriamo il triangolo OPQ del disegno seguente:



Per un risultato di trigonometria, l'angolo θ tra $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ è collegato alle lunghezze dei segmenti OP, OQ e PQ dalla formula[3]

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2\cos\theta |OP| \cdot |OQ| \tag{4.12}$$

Ora, per la (4.11), si ha $|OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ e $|OQ| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$; ci resta da calcolare la lunghezza $|PQ|$. Dal momento che la (4.11) ci consente di calcolare lunghezze solo dei vettori applicati in O, tracciamo come nel disegno seguente



il vettore $\vec{OR}$ parallelo al segmento PQ e avente la sua stessa lunghezza, ovvero $|PQ| = |\vec{OR}|$.

[3]Si tratta di una sorta di "teorema di Pitagora per triangoli qualunque": infatti, se il triangolo è rettangolo in O, ovvero $\theta = \frac{\pi}{2}$, allora $\cos\theta = 0$ e la formula si riduce a $|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2$, il classico teorema di Pitagora.

Ora, essendo $\vec{OR}$ parallelo a PQ e della stessa lunghezza, il quadrilatero di vertici O, R, P, Q è un parallelogramma che ha $\vec{OR}$ e $\vec{OP}$ come lati e $\vec{OQ}$ come diagonale: quindi, dalla definizione di somma tra vettori applicati, si ha $\vec{OQ} = \vec{OR} + \vec{OP}$, ovvero $\vec{OR} = \vec{OQ} - \vec{OP}$.
Per le proprietà delle coordinate viste nell'Osservazione 4.7, le coordinate di $\vec{OR} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ sono date dalle coordinate di $\vec{OQ}$ meno le coordinate di $\vec{OP}$, ovvero $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$, e quindi, dalla (4.11) si ha finalmente

$$|PQ| = |\vec{OR}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} \tag{4.13}$$

La formula (4.12) diventa allora

$$(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2-2\cos\theta\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2} \tag{4.14}$$

Poichè il primo membro, per la formula del quadrato di binomio, è uguale a

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2 + x_3^2 + y_3^2 - 2x_3y_3,$$

semplificando con i quadrati a secondo membro rimane

$$-2x_1y_1 - 2x_2y_2 - 2x_3y_3 = -2\cos\theta\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2} \tag{4.15}$$

ovvero, ricavando $\cos\theta$,

$$\cos\theta = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}} \tag{4.16}$$

che è finalmente la formula cercata che esprime l'angolo tra due vettori in funzione delle loro coordinate rispetto alla base data.

Con un calcolo analogo nel piano (dove non cambia nulla delle costruzioni fatte e dei passaggi svolti, salvo il fatto che abbiamo due coordinate anziché tre) si ottiene la formula analoga

$$\cos\theta = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \tag{4.17}$$

Esempio 4.9. Consideriamo ad esempio i vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ che rispetto a una base ortonormale $\{\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3\}$ hanno coordinate rispettivamente $(1, 0, 1)$ e $(1, -1, 0)$ (in base alla definizione di coordinate, sono quindi $\vec{OP} =$

$1\vec{OP}_1 + 0\vec{OP}_2 + 1\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_3$ e $\vec{OQ} = 1\vec{OP}_1 + (-1)\vec{OP}_2 + 0\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 - \vec{OP}_2$).
Allora l'angolo tra $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$, in base alla (4.16), è dato da

$$\cos\theta = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

ovvero, dalla trigonometria, $\theta = \frac{\pi}{3}$ (in gradi, 60°)

Le formule (4.16) e (4.17) ci forniscono anche un criterio per verificare in coordinate se due vettori sono perpendicolari: infatti, l'angolo θ è $\frac{\pi}{2}$ (ovvero 90 gradi) se e solo se $\cos\theta = 0$, il che può essere vero solo se i numeratori della (4.16) e della (4.17) sono nulli.
Ad esempio, nello spazio, abbiamo che due vettori $\vec{OP} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{OQ} \equiv (y_1, y_2, y_3)$ sono perpendicolari se e solo se si verifica

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0 \tag{4.18}$$

Ad esempio, i due vettori di coordinate $(1, 2, 1)$ e $(3, 1, -5)$ sono perpendicolari in quanto

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 3 + 2 - 5 = 0$$

Osservazione 4.10. In base al criterio (4.18), il vettore nullo $\vec{OO}$ risulta essere perpendicolare a qualunque altro vettore $\vec{OP}$, in quanto le sue coordinate sono $(0, 0, 0)$ e, qualunque siano le coordinate (x_1, x_2, x_3) di $\vec{OP}$ si ottiene $x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 0$.
Tuttavia, si noti che le formule (4.16) e (4.17) sono applicabili per calcolare un angolo solo se nessuno dei due vettori è nullo, altrimenti una delle due radici a denominatore varrebbe $\sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$, e come sappiamo non possiamo dividere per zero.

Il numeratore che compare nella (4.16), o nella (4.17) nel caso del piano, può essere interpretato come una nuova operazione che date due terne (due coppie nel caso del piano) di numeri reali, ci dà come risultato un numero reale: se denotiamo $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ (nel caso del piano, $x = (x_1, x_2)$) e $y = (y_1, y_2)$), possiamo cioè porre

$$x \cdot y := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \tag{4.19}$$

(nel caso del piano, $x \cdot y := x_1y_1 + x_2y_2$).
Per quello che riguarda i denominatori della (4.16) e della (4.17), dal momento che $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ rappresenta la lunghezza di un vettore $\vec{OP}$, che abbiamo denotato come $|\vec{OP}|$, possiamo denotare

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{4.20}$$

(nel caso del piano, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$).
Con queste notazioni, sia la formula (4.16) che la (4.17) si riscrivono come

$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{|x||y|}. \tag{4.21}$$

L'operazione $x \cdot y$ introdotta tra coppie o terne di vettori (cioè su su $\mathbb{R}^2$ e su $\mathbb{R}^3$) si chiama *prodotto scalare*: il nome è dovuto al fatto chesi tratta di un prodotto che dà come risultato uno scalare, ovvero un numero reale.
Si noti che non solo il prodotto scalare compare a numeratore dell'espressione dell'angolo tra due vettori in coordinate, ma anche la lunghezza $|x|$ di un vettore può essere espressa in funzione di esso, in quanto

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_3} = \sqrt{x \cdot x}$$

Osservazione 4.11. Il prodotto scalare $x \cdot y$ che abbiamo definito sopra è solo un caso particolare di una nozione più generale.
Più precisamente, noi abbiamo definito $x \cdot y$ solo per $x, y \in \mathbb{R}^2$ o $x, y \in \mathbb{R}^3$, perché stiamo lavorando con vettori nel piano o nello spazio che, fissato un sistema di riferimento, vengono descritti rispettivamente da coppie o terne di numeri reali, e vogliamo tramite questo prodotto calcolare lunghezze e angoli; ma, come abbiamo detto nell'Osservazione 4.8, può capitare di avere a che fare con oggetti e situazioni che richiedono più di tre parametri indipendenti per essere descritti, e in questi casi si deve ricorrere a $\mathbb{R}^n$ con n anche maggiore di 3: come esempio che abbiamo già citato, possiamo voler specificare la temperatura in ogni punto dello spazio, e allora ricorreremo a 4-uple $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ in cui le prime tre componenti sono le coordinate del punto e la quarta, x_4, rappresenta la sua temperatura.
Anche in tali situazioni può emergere l'esigenza di introdurre una "misura" sulle n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che rappresentano gli oggetti o gli stati del nostro sistema, magari allo scopo di controllare, o massimizzare o minimizzare qualche quantità che tenga conto di tutti i parametri usati.
Ispirandoci al prodotto scalare introdotto sopra per misurare le lunghezze e gli angoli tra vettori, potremmo ad esempio porre anche in tale situazione generale $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$, da cui $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, ma a seconda del significato delle componenti della n-upla potremmo voler assegnare loro pesi diversi: nell'esempio delle 4-uple, invece di prendere $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ potremmo ad esempio porre $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2}$ per far pesare di più il contributo della quarta componente (e il prodotto

scalare corrispondente sarebbe $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_4y_4$); ma potremmo anche voler far interagire i parametri tra loro in modo più complesso e usare espressioni più complicate, per esempio $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2}$ (il prodotto corrispondente sarebbe $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + x_4y_4$).
In generale, possiamo definire $x \cdot y$ in base alle nostre esigenze, ma con un avvertimento: $x \cdot y$ deve essere tale poter poi definire la lunghezza tramite la $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ e, qualunque significato vogliamo dargli nel nostro contesto, l'angolo tramite la $\cos\theta = \frac{x \cdot y}{|x||y|}$: quindi, ad esempio, deve essere $x \cdot x \geq 0$ (perché questa quantità possa stare sotto radice) o $-1 \leq \frac{x \cdot y}{|x||y|} \leq 1$ (affinché questa quantità possa essere un coseno, che è appunto sempre compreso tra -1 e 1).
Ebbene, si dimostra che queste e altre importanti proprietà sono garantite se assumiamo che il prodotto $x \cdot y$ che stiamo scegliendo goda delle seguenti proprietà: deve essere commutativo ($x \cdot y = y \cdot x$), distributivo rispetto alla somma ($x \cdot (y + y') = x \cdot y + x \cdot y'$ e $(x + x') \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y$), deve essere tale che $x \cdot (cy) = (cx) \cdot y = c(x \cdot y)$ per ogni $c \in \mathbb{R}$, e infine deve accadere che $x \cdot x$ sia sempre maggiore o uguale di zero, e uguale a zero solo se x ha tutte le componenti nulle.
Si definisce allora in generale *prodotto scalare* una qualunque operazione che abbia esattamente queste proprietà, ma non approfondiamo ulteriormente questo argomento.

Vediamo ora che in $\mathbb{R}^3$ è possibile introdurre anche un'altra operazione molto utile nella grafica ma anche in altre applicazioni (soprattutto in fisica), il *prodotto vettoriale*, che date due terne di numeri reali dà come risultato non uno scalare (come nel caso del prodotto scalare) ma una nuova terna (cioè un nuovo vettore, come suggerisce il nome). La definizione è la seguente: se $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ allora si pone

$$x \wedge y := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \tag{4.22}$$

Ad esempio, se $x = (1, 2, 3)$ e $y = (2, 5, -1)$, si ha

$$x \wedge y := (2 \cdot (-1) - 3 \cdot 5, 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2) = (-17, 7, 1)$$

Il motivo di questa particolare definizione è che si vuole che la terna $x \wedge y$ rappresenti (in coordinate) un vettore che è perpendicolare sia al vettore rappresentato da x che a quello rappresentato da y.
Per verificare che effettivamente è così, basta usare il criterio di perpendicolarità visto nella (4.19), cioè moltiplicare le rispettive componenti di x e $x \wedge y$

(la prima con la prima, la seconda con la seconda, la terza con la terza) e sommare:

$$x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) =$$
$$x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - x_2x_1y_3 + x_3x_1y_2 - x_3x_2y_1 = 0$$

in quanto come si vede facilmente tutti i termini si semplificano.
Analogamente, per verificare che anche il vettore di coordinate y è perpendicolare al vettore rappresentato dal prodotto vettoriale $x \wedge y$, svolgiamo il prodotto scalare tra y e $x \wedge y$:

$$y_1(x_2y_3 - x_3y_2) + y_2(x_3y_1 - x_1y_3) + y_3(x_1y_2 - x_2y_1) =$$
$$y_1x_2y_3 - y_1x_3y_2 + y_2x_3y_1 - y_2x_1y_3 + y_3x_1y_2 - y_3x_2y_1 = 0$$

come volevamo.
Per citare alcune proprietà dell'operazione di prodotto vettoriale, segnaliamo ad esempio che esso *non* è commutativo, ma si ha

$$x \wedge y = -y \wedge x$$

ovvero quando cambiamo l'ordine dei fattori il risultato finale cambia di segno. Ad esempio, per i due vettori $x = (1, 2, 3)$ e $y = (2, 5, -1)$ per cui sopra abbiamo già calcolato $x \wedge y$, si ha

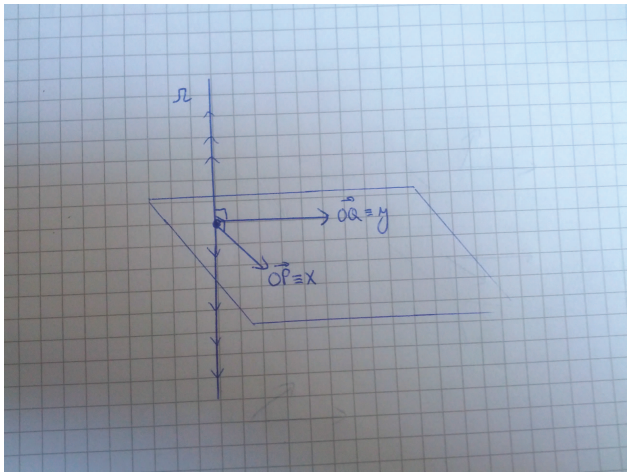
$$y \wedge x = (5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2, -1 \cdot 1 - 2 \cdot 3, 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1) = (17, -7, -1)$$

cioè proprio l'opposto della terna $(17, 7, -1)$ ottenuta sopra.
Ancora, nei calcoli è necessario fare attenzione al fatto che il prodotto vettoriale *non* è neanche associativo, cioè in generale si ha

$$x \wedge (y \wedge z) \neq (x \wedge y) \wedge z$$

Ad esempio, se prendiamo $x = (1, 0, 0)$ e $y = z = (0, 1, 0)$, si vede facilmente che $x \wedge y = (0, 0, 1)$ e $(x \wedge y) \wedge z = (-1, 0, 0)$, mentre dall'altra si ha $y \wedge z = (0, 0, 0)$ e $x \wedge (y \wedge z) = (0, 0, 0)$.

Abbiamo detto che il prodotto vettoriale $x \wedge y$ di due terne $x, y \in \mathbb{R}^3$ ci dà le coordinate di un vettore perpendicolare a entrambi i vettori rappresentati da x e da y, e che quindi si trova sulla retta rappresentata nel disegno seguente:



Conoscendo quindi la direzione di tale vettore, per determinarlo completamente dobbiamo trovarne lunghezza e verso.
Per quello che riguarda la lunghezza, sappiamo come calcolarla mediante la formula (4.20). In base a tale formula e alla (4.22), si ha

$$|x \wedge y|^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

Svolgendo i conti (omettiamo i passaggi), non è difficile vedere che tale espressione è uguale a

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$$

ovvero, ricordando le notazioni introdotte nella (4.19) e nella (4.20),

$$|x|^2|y|^2 - (x \cdot y)^2$$

Riscrivendo questa espressione come

$$|x|^2|y|^2 \left(1 - \frac{(x \cdot y)^2}{|x|^2|y|^2}\right)$$

e ricordando la (4.21), concludiamo che

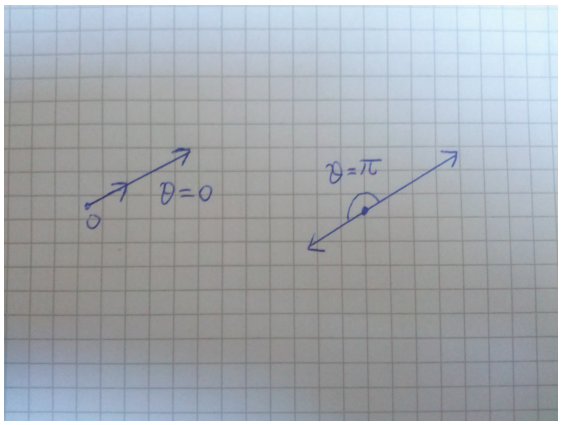
$$|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2(1 - \cos^2\theta) = |x|^2|y|^2 \sin^2\theta$$

(dove abbiamo usato l'identità trigonometrica $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$), ovvero, estraendo la radice a entrambi i membri,

$$|x \wedge y| = |x||y| \sin\theta \tag{4.23}$$

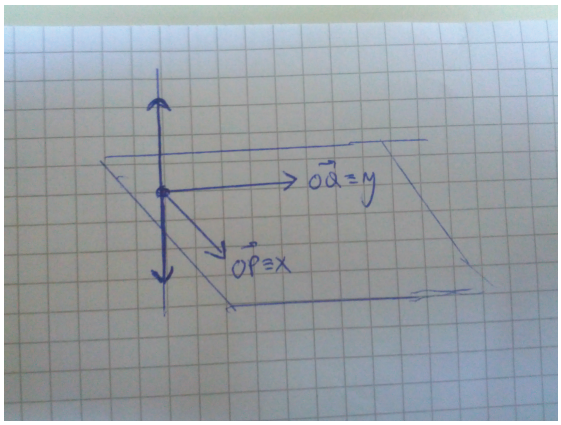
che è finalmente una formula semplice per la lunghezza del vettore rappresentato in coordinate da $x \wedge y$, in funzione della lunghezza $|x|$ del vettore rappresentato da x, della lunghezza $|y|$ del vettore rappresentato da y e dell'angolo θ formato da questi due vettori.

Tale formula ci dice ad esempio che $|x \wedge y| = 0$ (ovvero $x \wedge y = (0, 0, 0)$ rappresenta il vettore nullo $\vec{OO}$) esattamente quando $\sin\theta = 0$ ovvero, come ci dice la trigonometria, quando $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ (180 gradi). Come si vede nel disegno seguente



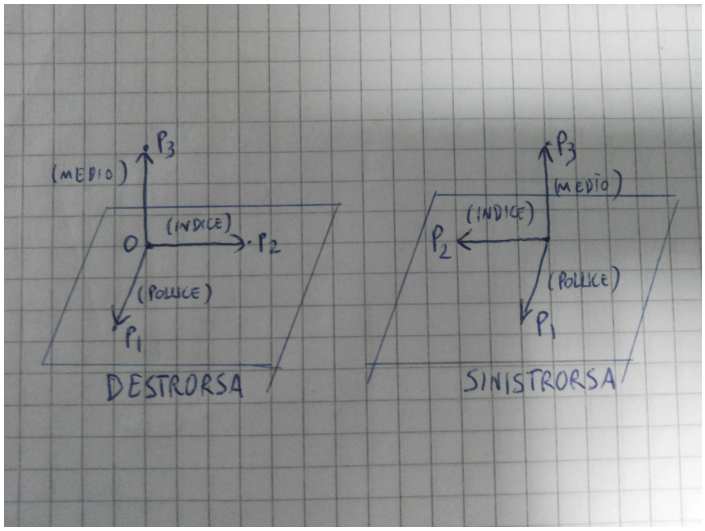
questo equivale a dire che i vettori sono allineati.

Conoscendo direzione e lunghezza del vettore rappresentato da $x \wedge y$, per il verso abbiamo solo due possibilità:

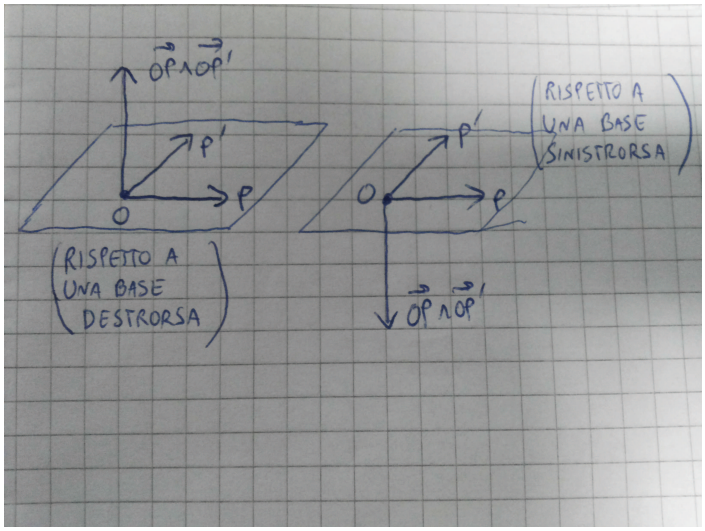


Ora, come vedremo, in realtà il verso del vettore rappresentato da $x \wedge y$ non è determinabile in modo univoco, ma dipende da quale base ortonormale abbiamo scelto per tradurre i vettori in coordinate.

Più precisamente, esistono due tipi di basi ortonormali: quelle *destrorse*, cosiddette perché i tre vettori $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$ che le costituiscono sono, nell'ordine orientate come pollice, indice e medio della mano destra (disposti a formare angoli ortogonali tra loro), e quelle *sinistrorse*, cosiddette perché i tre vettori $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$ sono orientate invece come pollice, indice e medio della mano sinistra (sempre disposti a formare angoli ortogonali tra loro).



È facile convincersi che si tratta effettivamente di tipi diversi: non è possibile sovrapporre perfettamente tutte e tre le dita pollice, indice e medio delle mani destra e sinistra, disposte a formare angoli ortogonali tra loro, comunque ruotiamo le mani: riusciamo sempre a sovrapporne due, ma il terzo dito risulta sempre di verso opposto tra una mano e l'altra.
Ora, l'importante risultato che si può dimostrare è che, se stiamo usando una base destrorsa, allora il vettore rappresentato da $x \wedge y$ ha verso tale che i tre vettori rappresentati da x, y e $x \wedge y$ sono, nell'ordine, ancora orientati "in modo destrorso" (ovvero come pollice, indice e medio della mano destra), mentre se usiamo una base sinistrorsa, allora i tre vettori rappresentati da x, y e $x \wedge y$ sono, nell'ordine, ancora orientati "in modo sinistrorso" (ovvero come pollice, indice e medio della mano sinistra).



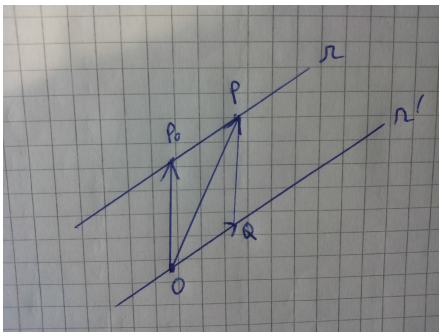
Nella maggior parte dei testi si sceglie di usare basi ortonormali destrorse: si dice allora, soprattutto nei testi di fisica, che il prodotto vettoriale è definito usando la *regola della mano destra*.

4.4 Sistemi di riferimento nello spazio e equazioni di rette e piani

Quanto visto nel paragrafo precedente ci consente di definire la nozione di coordinate di un punto nel piano o nello spazio e tradurre problemi geometrici in problemi numerici e equazioni.
Per assegnare coordinate a un punto P (del piano o dello spazio) basta fissare prima di tutto un punto O, e poi una base B per i vettori applicati in O (sarà $B = \{\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}\}$ se siamo nello spazio tridimensionale e $B = \{\vec{OP_1}, \vec{OP_2}\}$ se siamo nel piano). Queste due scelte formano quello che si chiama un *sistema di riferimento*, e O si dice *origine del sistema*
A questo punto, diciamo che le *coordinate del punto* P rispetto al sistema di riferimento fissato sono semplicemente le coordinate del vettore $\vec{OP}$ rispetto alla base scelta.
Scriveremo $P \equiv (x, y, z)$ (nel piano, $P \equiv (x, y)$) per dire che x, y, z (rispettivamente, x, y) sono le coordinate di P rispetto al sistema di riferimento fissato, ovvero, in base alla definizione appena data, $\vec{OP} = x\vec{OP_1} + y\vec{OP_2} + z\vec{OP_3}$ (rispettivamente, $\vec{OP} = x\vec{OP_1} + y\vec{OP_2}$).
Chiaramente, le coordinate di P dipendono fortemente sia dalla scelta iniziale dell'origine O (cambiando O, cambia il vettore $\vec{OP}$ di cui dobbiamo calcolare le coordinate) che dalla scelta della base: in effetti, il sistema di riferimento

solitamente si sceglie in modo da semplificare il più possibile il problema che si vuole risolvere.

Ora, se fissato un sistema di riferimento ogni punto dello spazio (o del piano) ha una sua terna (rispettivamente, coppia) di coordinate, data una retta ci chiediamo se è possibile ricavare una formula che ci dia le coordinate di tutti i suoi punti.
A questo scopo, fissiamo come nel disegno seguente un punto P_0 della retta r e osserviamo che dato un suo qualunque altro punto P, il vettore $\vec{OP}$ si decompone come somma di $\vec{OP_0}$ più un vettore $\vec{OQ}$ che giace sulla retta r' parallela a r e passante per O.

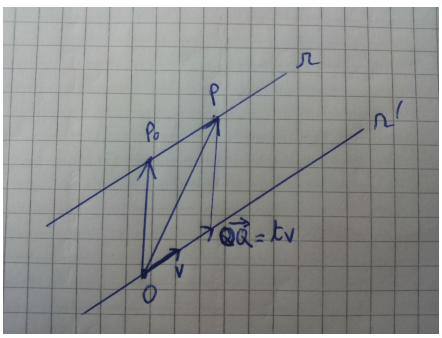


Fissato P_0, quindi, esiste una corrispondenza tra i punti P della retta e i vettori $\vec{OQ}$ che giacciono su r', data proprio da

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{OQ} \tag{4.24}$$

Il vantaggio di passare dai punti della retta r ai vettori $\vec{OQ}$ che giacciono su r' consiste nel fatto che tali vettori $\vec{OQ}$ sono tutti multipli tra loro: basta quindi fissarne uno (non nullo), diciamo v, e si avrà sempre $\vec{OQ} = tv$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.
Quindi, la (4.24) può essere riscritta

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + tv \tag{4.25}$$



Ora, traduciamo tale uguaglianza in coordinate rispetto a un sistema di riferimento: se siamo nello spazio, ricordando le proprietà delle coordinate dei vettori viste nell'Osservazione 4.7, da $\vec{OP} = \vec{OP_0} + tv$ abbiamo che le coordinate (x, y, z) di $\vec{OP}$ sono uguali alle coordinate, diciamo (x_0, y_0, z_0), di $\vec{OP_0}$ più le coordinate di tv, che a loro volta, sempre per l'Osservazione 4.7, sono uguali al prodotto di t per le coordinate, diciamo (l, m, n), di v, ovvero

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n) = (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt) \tag{4.26}$$

La (4.26) ci dice quindi che i punti della retta sono dati esattamente dalle terne (x, y, z) per le quali si ha $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.
È convenzione comune riunire queste tre condizioni nella forma

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{4.27}$$

Dal momento che le (4.27) ci danno esplicitamente le coordinate di tutti i punti della retta r al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, si dice allora che tali uguaglianze sono le *equazioni parametriche* di r.

Se invece stiamo lavorando nel piano, si procede nello stesso modo per arrivare allo stesso risultato, ma con una coordinata in meno: da $\vec{OP} = \vec{OP_0} + tv$ abbiamo che le coordinate (x, y) di $\vec{OP}$ sono uguali alle coordinate, diciamo (x_0, y_0), di $\vec{OP_0}$ più le coordinate di tv, che a loro volta sono uguali al prodotto di t per le coordinate, diciamo (l, m), di v, ovvero

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(l, m) = (x_0 + lt, y_0 + mt) \tag{4.28}$$

La (4.28) ci dice quindi che i punti della retta sono dati esattamente dalle terne (x, y) per le quali si ha $x = x_0 + lt$ e $y = y_0 + mt$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.
Come nel caso dello spazio, è convenzione comune riunire queste condizioni nella forma

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \tag{4.29}$$

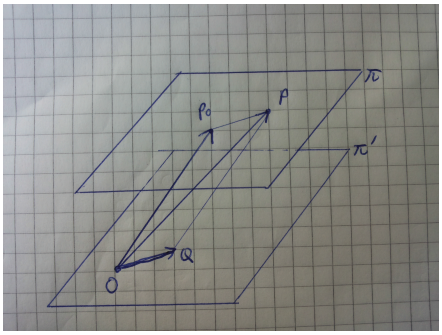
e si parla sempre di *equazioni parametriche* di r.

Osservazione 4.12. Si osservi che è del tutto ragionevole che per conoscere la retta abbiamo dovuto scegliere un punto P_0 e un vettore v sulla retta a lei parallela e passante per l'origine: infatti, fissato un punto P_0 esistono infinite

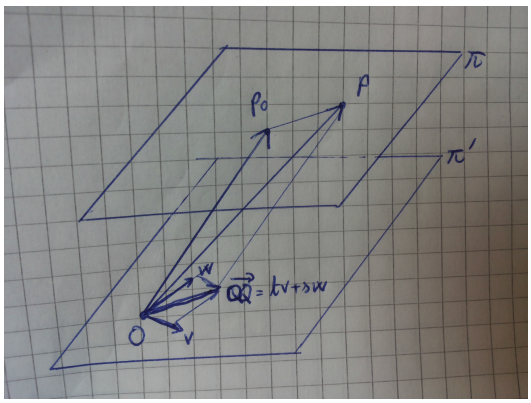
rette passanti per P_0, e il vettore v ha il ruolo di fissare la direzione della retta.
Per questo motivo, l'unico vincolo sulla scelta di v è che esso non deve essere nullo, ovvero non devono essere nulle le sue coordinate l, m, n. Questa è l'unica condizione che deve essere soddisfatta affinché una terna di uguaglianze come le (4.27) rappresenti effettivamente una retta r.

Ora vediamo come un procedimento analogo può essere applicato per determinare i punti di un piano π nello spazio.

Infatti, come nel disegno seguente, fissiamo un punto P_0 del piano π e osserviamo che per ogni $P \in \pi$, il vettore $\vec{OP}$ si decompone come somma $\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{OQ}$ di $\vec{OP_0}$ più un vettore $\vec{OQ}$ che giace sul piano π' parallelo a π e passante per O.



Esattamente come nel caso della retta, il vantaggio di ricondurre la descrizione dei punti P del piano π ai vettori $\vec{OQ}$ che giacciono su π' consiste nel fatto che tali vettori possono essere tutti ottenuti come combinazione di due vettori non allineati v e w fissati, ovvero $\vec{OQ} = tv + sw$, per opportuni $t, s \in \mathbb{R}$



Quindi, riassumendo, per tutti i punti P sul piano π vale la relazione

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + tv + sw \tag{4.30}$$

Ora, come fatto sopra per la retta, traduciamo tale uguaglianza in coordinate rispetto al sistema di riferimento fissato: usando sempre le proprietà delle coordinate viste nell'Osservazione 4.7, da $\vec{OP} = \vec{OP_0} + tv + sw$ abbiamo che le coordinate (x, y, z) di $\vec{OP}$ sono uguali alle coordinate, diciamo (x_0, y_0, z_0), di $\vec{OP_0}$ più le coordinate di tv, (che sono uguali a t per le coordinate, diciamo (l, m, n), di v), più le coordinate di sw (chesono uguali a s per le coordinate, diciamo (l', m', n'), di w) ovvero

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)+t(l, m, n)+s(l', m', n') = (x_0+lt+l's, y_0+mt+m's, z_0+nt+n's) \tag{4.31}$$

La (4.31) ci dice quindi che i punti del piano sono dati esattamente dalle terne (x, y, z) per le quali si ha $x = x_0+lt+l's$, $y = y_0+mt+m's$, $z = z_0+nt+n's$ per certi $t, s \in \mathbb{R}$.
È convenzione comune riunire queste tre condizioni nella forma

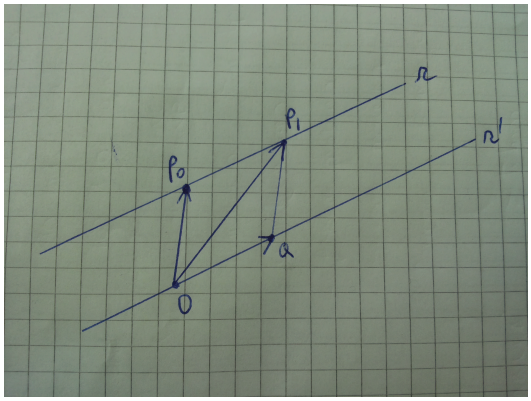
$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l's \\ y = y_0 + mt + m's \\ z = z_0 + nt + n's \end{cases} \tag{4.32}$$

Dal momento che le (4.32) ci danno esplicitamente le coordinate di tutti i punti del piano π al variare dei parametri $t, s \in \mathbb{R}$, si dice allora che tali uguaglianze sono le *equazioni parametriche* di π.

Osservazione 4.13. Come una retta è determinata da un suo punto e da un vettore che ne determina la direzione, così un piano è determinato da un punto e da due vettori v e w che, determinando il piano parallelo al piano dato e passante per l'origine determinano la cosiddetta *giacitura* (ovvero come il piano giace, cioè come è orientato o disposto, nello spazio: non avrebbe senso parlare di direzione del piano perché questo si sviluppa in due dimensioni e non in una sola). Poiché i vettori v e w devono generare il piano per O, l'unico vincolo sulla scelta di tali vettori è che essi non devono essere allineati, il che equivale a dire che le terne (l, m, n) e (l', m', n') non devono essere proporzionali: questa è l'unica condizione che deve essere soddisfatta affinché una terna di uguaglianze come le (4.32) rappresenti effettivamente un piano.

Ora, la geometria euclidea classica ci dice che dati due punti distinti P_0 e P_1 nel piano o nello spazio, esiste un'unica retta r che li contiene. Ci

proponiamo di determinare questa retta a partire dalle coordinate dei due punti, che supponiamo note.
Supponiamo che sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$. Per determinare le equazioni parametriche della retta, come sappiamo, ci servono le coordinate (l, m, n) di un vettore non nullo che giaccia sulla retta r' parallela a r e passante per l'origine O del sistema di riferimento. A questo scopo, tracciamo la retta r' e, come nel disegno seguente, tracciamo partendo da P_1 il segmento P_1Q parallelo a OP_0 :



Chiaramente, possiamo usare il vettore $\vec{OQ}$ come generatore della giacitura: ma essendo il quadrilatero OP_0P_1Q un parallelogramma, per definizione di somma tra vettori geometrici si ha $\vec{OQ} + \vec{OP_0} = \vec{OP_1}$, da cui $\vec{OQ} = \vec{OP_1} - \vec{OP_0}$.
Le coordinate (l, m, n) di $\vec{OQ}$ rispetto alla base B che abbiamo usato per fissare il sistema di riferimento saranno quindi, usando sempre le proprietà delle coordinate rispetto alla somma di vettori, uguali alle coordinate (x_1, y_1, z_1) di $\vec{OP_1}$ meno le coordinate (x_0, y_0, z_0) di $\vec{OP_0}$, cioè

$$(l, m, n) = (x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0).$$

Sostituendo nell'espressione generale (4.27) delle equazioni parametriche di una retta si trova allora

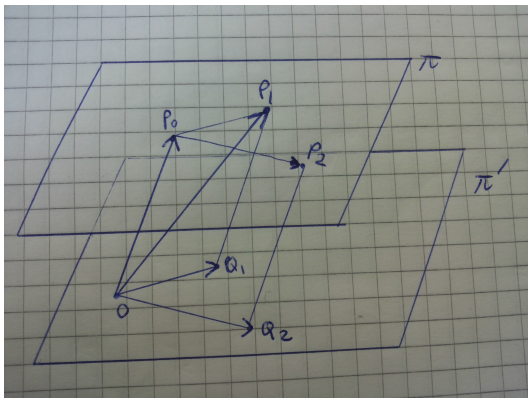
$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases} \tag{4.33}$$

che sono quindi le equazioni della retta nello spazio che passa per P_0 e P_1.
Nel piano, si ha lo stesso risultato ma con una coordinata in meno, ovvero

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \tag{4.34}$$

Si noti che se i punti non fossero distinti il vettore $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, che si ottiene sottraendo le loro coordinate, sarebbe nullo e non potrebbe servire da vettore direzione della retta.

Analogamente, la geometria euclidea classica ci dice che dati tre punti P_0, P_1, P_2 non allineati (ovvero che non appartengono alla stessa retta), allora esiste un unico piano π che li contiene. Ci proponiamo di determinare questo piano a partire dalle coordinate dei tre punti.
Supponiamo che sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$.
Per determinare le equazioni parametriche del piano, come sappiamo, ci servono le coordinate (l, m, n), (l', m', n') di due vettori non proporzionali che giacciano sul piano π' parallelo a π e passante per l'origine O del sistema di riferimento. A questo scopo, disegniamo il piano π' e, analogamente a quanto fatto nel caso della retta, consideriamo i parallelogrammi OP_0P1Q_1 e $OP_0P_2Q_2$



I due vettori $O\vec{Q}_1$ e $O\vec{Q}_2$, rispettivamente paralleli ai segmenti P_0P_1 e P_0P_2, giacciono sul piano π' e, per il fatto che i tre punti P_0, P_1, P_2 sono non allineati, sono non proporzionali, quindi possiamo usarli come generatori della giacitura.
Per determinare le coordinate di tali vettori, osserviamo che per definizione di somma tra vettori geometrici si ha $O\vec{Q}_1 + O\vec{P}_0 = O\vec{P}_1$ e $O\vec{Q}_2 + O\vec{P}_0 = O\vec{P}_2$, da cui $O\vec{Q}_1 = O\vec{P}_1 - O\vec{P}_0$ e $O\vec{Q}_2 = O\vec{P}_2 - O\vec{P}_0$.
Allora, le coordinate (l, m, n) e (l', m', n') di $O\vec{Q}_1$ e $O\vec{Q}_2$ rispettivamente saranno quindi, sempre usando le proprietà delle coordinate già citate sopra,

$$(l, m, n) = (x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0).$$

$$(l', m', n') = (x_2, y_2, z_2) - (x_0, y_0, z_0) = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0).$$

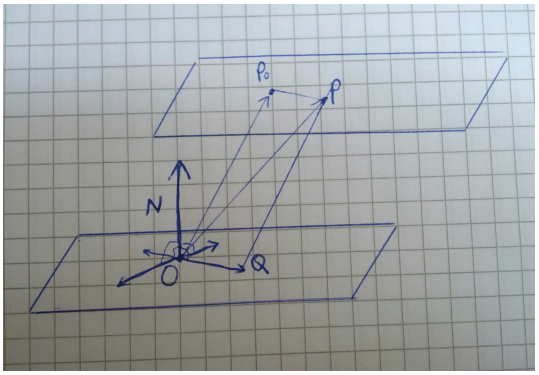
Sostituendo nell'espressione generale (4.32) delle equazioni parametriche di un piano si trova allora

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t + (x_2 - x_0)s \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t + (y_2 - y_0)s \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t + (z_2 - z_0)s \end{cases} \tag{4.35}$$

che sono quindi le equazioni del piano che passa per P_0, P_1 e P_2.

Vediamo ora un modo alternativo per descrivere rette e piani, quello dato dalle cosiddette *equazioni cartesiane*.

Iniziamo dai piani: come visto nel disegno a pagina 146, fissato un punto P_0 del piano, per ogni altro suo punto P si ha che il vettore $\vec{OP}$ si decompone come somma $\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{OQ}$, dove $\vec{OQ}$ è un vettore che sta sul piano parallelo al piano dato e passante per O.
Avevamo poi osservato che ogni tale $\vec{OQ}$ si scrive come somma $tv + sv'$ di due vettori v e v' non allineati, ottenendo così le parametriche; l'osservazione alternativa che facciamo ora invece, è che tutti i vettori $\vec{OQ}$ sono perpendicolari a un qualunque vettore N perpendicolare al piano:



Quindi i punti P del piano sono caratterizzati dalla condizione che $\vec{OP} - \vec{OP_0} = \vec{OQ}$ è perpendicolare a N. Ora, esprimiamo tale condizione in coordinate: se denotiamo con (x, y, z) le coordinate di P (ovvero le coordinate del vettore $\vec{OP}$) e con (x_0, y_0, z_0) le coordinate di P_0 (ovvero le coordinate del vettore $\vec{OP_0}$), le coordinate del vettore $\vec{OP} - \vec{OP_0}$ sono date, come sappiamo dalle proprietà delle coordinate, dalla terna $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Dette (a, b, c) le coordinate del vettore N, sappiamo che, *se la base fissata*

per il nostro sistema di riferimento è ortonormale, allora la condizione che $\vec{OP} - \vec{OP_0}$ sia perpendicolare a N equivale in base alla (4.18) a

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Questa quindi è la condizione che devono soddisfare le coordinate (x, y, z) di un punto P perché il punto appartenga al piano.
Svolgendo i conti otteniamo

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

ovvero, portando a secondo membro tutti i termini che non contengono x, y, z,

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Denotando $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$, otteniamo infine

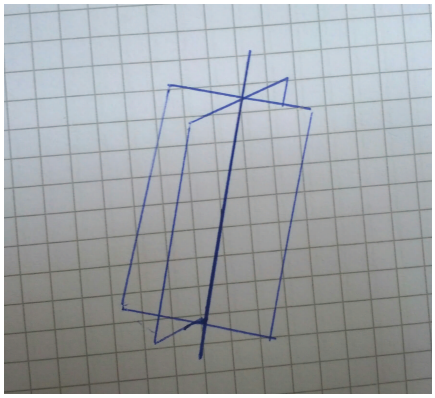
$$ax + by + cz = d \tag{4.36}$$

In conclusione, i punti di un piano dato sono caratterizzati dal fatto che le loro coordinate (x, y, z) soddisfano un'equazione di primo grado in tre incognite; se la base del nostro sistema di riferimento è ortonormale, i coefficienti di x, y, z nell'equazione, ovvero a, b, c, rappresentano le coordinate di un vettore perpendicolare al piano (detto anche una *normale al piano*); il termine noto d dell'equazione contiene invece l'informazione relativa a un punto per cui passa il piano, come abbiamo visto ricavando l'equazione.
Poichè piani con la stessa normale risultano paralleli, deduciamo che fissando a, b, c e facendo variare solo d "muoviamo" il piano parallelamente a se stesso.

Esempio 4.14. L'equazione $x + 2y + 3z = 6$ rappresenta un piano nello spazio, la cui giacitura è normale al vettore di coordinate $(1, 2, 3)$; un esempio di punto che appartiene al piano è $P \equiv (1, 1, 1)$, in quanto sostituendo tali coordinate al posto di x, y, z nell'equazione si ottiene $1 + 2 + 3 = 6$ che è verificata, mentre ad esempio il punto $P \equiv (1, 2, 0)$ non appartiene al piano in quanto $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 6$ non è verificata.

L'equazione cartesiana del piano rappresenta un modo *implicito* di dare i punti del piano, diversamente dalle equazioni parametriche che ci danno i punti *esplicitamente*: infatti, mentre nel caso delle parametriche i punti del piano sono dati semplicemente scegliendo valori reali dei parametri t e s, nel caso nelle cartesiane per ottenere i punti del piano bisogna trovare le soluzioni dell'equazione: tale equazione rappresenta un vincolo che imponiamo ai punti dello spazio per appartenere al piano.

Nel caso delle rette, possiamo rappresentarle in maniera implicita come segue: come si vede nel disegno

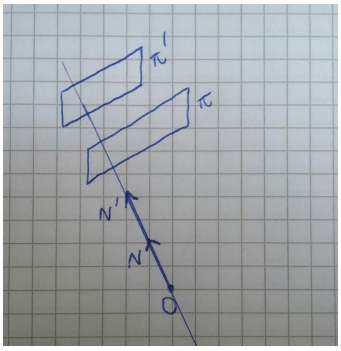


qualunque retta può essere pensata come intersezione di due piani (esistono infiniti piani che contengono una retta data, ma basta prenderne due per ottenere la retta come intersezione).
Supponendo che il primo piano sia descritto dall'equazione cartesiana $ax + by + cz = d$ (ovvero i punti del primo piano sono, in coordinate, le soluzioni di questa equazione) e il secondo piano dall'equazione $a'x + b'y + c'z = d'$ (ovvero i punti del secondo piano sono, in coordinate, le soluzioni di quest'altra equazione) allora i punti della retta, essendo i punti comuni ai due piani, sono dati dalle soluzioni comuni a queste due equazioni, ovvero dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \tag{4.37}$$

Abbiamo quindi dimostrato che, oltre che esplicitamente attraverso equazioni parametriche, una retta nello spazio può essere descritta implicitamente mediante un sistema di due equazioni di primo grado in tre incognite.

Osservazione 4.15. Per rappresentare una retta come intersezione di due piani, è ovviamente necessario che i due piani non siano paralleli (l'intersezione sarebbe l'insieme vuoto) o addirittura coincidenti: ma questo accade solo se le normali dei due piani sono uguali o al più una è mutiplo dell'altra (cambierebbe lunghezza o verso ma la direzione rimarrebbe la stessa):



Ad esempio, il sistema di equazioni seguente $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x-2y+4z=2 \end{cases}$, pur essendo un sistema di due equazioni di primo grado in tre incognite, non rappresenta una retta: la normale al piano rappresentato dalla prima equazione $x-y+2z=3$ è $N \equiv (1,-1,2)$, la normale al piano rappresentato dalla seconda equazione $2x-2y+4z=2$ è $N' \equiv (2,-2,4)$: essendo le coordinate di N' date dalle coordinate di N moltiplicate per 2, deduciamo che $N'=2N$ e quindi i due piani, avendo normali con la stessa direzione, sono paralleli e non si incontrano lungo una retta.
Invece, ad esempio, il sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$ rappresenta una retta nello spazio; il punto $(1,1,1)$ appartiene alla retta in quanto le sue coordinate soddisfano entrambe le equazioni, il punto $(2,0,1)$ non appartiene alla retta in quanto benché le sue coordinate soddisfino la prima equazione non soddisfano la seconda.

Quanto visto sino ad ora suggerisce che per risolvere problemi geometrici riguardanti rette e piani è necessario saper risolvere i sistemi di equazioni di primo grado: infatti, non solo nelle espressioni delle parametriche i parametri t ed s compaiono con grado 1, e le cartesiane sono sistemi di equazioni di primo grado, ma se volessimo ad esempio capire se un piano e una retta dati rispettivamente da equazioni cartesiane $ax+by+cz=d$ e $\begin{cases} a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$ si intersecano, e trovare gli eventuali punti di intersezione, dovremmo risolvere il sistema $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$ che si ottiene mettendo insieme tutte le equazioni (in quanto i punti comuni al piano e alla retta sono i punti che soddisfano sia l'equazione del piano che le due equazioni della retta).
Anche in parametriche, il problema di indivuduare i punti comuni si traduce in un sistema di equazioni di primo grado: se ad esempio ho due piani, dati

da parametriche $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 + t - s \\ z = t + 2s \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -2 + t + 3s \\ y = 1 - t - s \\ z = 1 + t + s \end{cases}$, per trovare i punti comuni dovrei scoprire se esistono valori di t ed s nelle prime e valori t' ed s' (eventualmente diversi dai t e s scelti nelle prime) nelle seconde che ci danno gli stessi valori di x, y, z, ovvero impostare le uguaglianze

$$\begin{cases} 1 + t + s = -2 + t' + 3s' \\ 2 + t - s = 1 - t' - s' \\ t + 2s = 1 + t' + s' \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t + s - t' - 3s' = -3 \\ t - s + t' + s' = -1 \\ t + 2s - t' - s' = 1 \end{cases}$$

che è un sistema di tre equazioni di primo grado in quattro incognite.
Emerge quindi l'esigenza di saper risolvere i sistemi di primo grado con qualunque numero di equazioni e qualunque numero di incognite, che sarà lo scopo del prossimo capitolo.