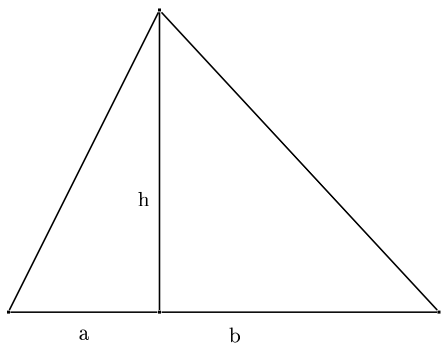
Nome e Cognome ....

Matricola: ....

Prima Prova Parziale di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

8 novembre 2019 - Compito 1

1. Dato il triangolo in figura



calcolarne l'area, essendo

$$a = 127.15 \cdot 10^{-1}, \quad b = 0.0039427 \cdot 10^{4} \quad \text{e} \quad h = 3995.14 \cdot 10^{-2},$$

in un sistema in virgola mobile $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ con $\beta = 10$, $U = -L = 9$ e con $t = 3$. Calcolare inoltre l'area ponendo $t = 4$. Calcolare gli errori relativi nei due casi.

Soluzione. Per $t = 3$: $fl(\text{AREA}) = 0.104 \cdot 10^4$ (errore relativo $\rho \simeq 0.4100054 \cdot 10^{-3}$). Per $t = 4$: $fl(\text{AREA}) = 0.1042 \cdot 10^4$ (errore relativo $\rho \simeq 0.4100054 \cdot 10^{-3}$).

2. Si determini, mediante la fattorizzazione $A = LU$, la soluzione dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \frac{2}{3}x_3 = \frac{1}{3} \\ 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 = -5 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - \frac{2}{3}x_3 = \frac{2}{3} \\ 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 5 \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 3 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, sempre mediante la fattorizzazione $A = LU$, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema. BONUS: si calcoli la terza colonna di A^{-1}.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{20} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{19}{40} \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -\frac{19}{12}, \quad \mathbf{x}_1 = (-3, 2, -2, 3)^T, \quad \mathbf{x}_1 = (0, 2, 2, 0)^T \quad \mathbf{z} = \frac{1}{19}(1, 3, 6, -18)^T.$$

3. Assegnate le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 4 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{15}{4} \end{bmatrix},$$

a) determinare i valori del parametro reale β tali che:

   a1) B sia l'inversa di A;

   a2) A risulti definita positiva;

b) assegnato il valore $\beta = 3$, calcolare il determinante di A e il suo raggio spettrale;

c) assegnato il valore trovato nel punto a1), calcolare $k_1(A)$, $k_\infty(B)$ e $k_2(A)$.

Soluzione.

a1) $\beta = 2$;

a2) $-\sqrt{15} < \beta < \sqrt{15}$;

b) $\det(A) = 24$, $\rho(A) = 4 + \sqrt{10}$;

c) $k_1(A) = k_\infty(B) = \frac{49}{11}$, $k_2(A) = \frac{|4+\sqrt{5}|}{|4-\sqrt{5}|}$.