Jorge Vitória, email: jorge.vitoria@unica.it
Sergio Pavon, email: sergio.pavon@math.unipd.it
Università di Studi di Cagliari, 2019/2020
Corso di Laurea in Informatica

Esercizi per il Corso di MATEMATICA DISCRETA

Foglio 5
25 ottobre 2019

1. Attraverso l'uso delle sommatorie calcolate in lezione o sul Foglio 5, e usando se necessario un cambio di variabile o le proprietà delle sommatorie, si calcolino, per ogni $n \geq 1$:
   (a) $\sum_{k=3}^{n} k$
   (b) $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}$
   (c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$
   (d) $4 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^3$
   (e) $\sum_{k=3}^{n+3} (k-3)! \cdot (k-3)$
2. Si determini se le seguenti triple sono anelli.
   (a) $(\mathbb{Z}, *, \square)$ dove $x * y = x + y$ e $x \square y = x + y$
   (b) $(\mathbb{Q}, *, \square)$ dove $x * y = xy$ e $x \square y = x + y$;
   (c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *, \square)$ dove $x * y = xy$ e $x \square y = x + y$;
   (d) $(\mathbb{Z}^2, *, \square)$ dove $(x, y) * (z, w) = (x + z, y + w)$ e $(x, y) \square (z, w) = (xz, yw)$;
   (e) $(\mathbb{Z}^2, *, \square)$ dove $(x, y) * (z, w) = (x + z, y + w)$ e $(x, y) \square (z, w) = (xz - yw, yz + xw)$.
   (f) $(\{-1, 1\}, *, \square)$ dove $x * y = xy$ e dove $1 \square x = 1 = x \square 1$ per qualsiasi x in $\{-1, 1\}$ e $-1 \square -1 = -1$
3. Per ognuna delle seguenti coppie (n, b) di interi, si trovi la coppia di interi (q, r) data dall'algoritmo di divisione.
   (a) $(n, b) = (43, 6)$;
   (b) $(n, b) = (27, -5)$;
   (c) $(n, b) = (-92, 7)$;
   (d) $(n, b) = (-35, -4)$.
4. Per ogni delle seguenti coppie (n, b) di numeri positivi, si trovi la scrittura di n in base b.
   (a) $(n, b) = (115, 2)$;
   (b) $(n, b) = (86, 2)$;
   (c) $(n, b) = (62, 3)$;
   (d) $(n, b) = (43, 6)$;
   (e) $(n, b) = (27, 5)$;
   (f) $(n, b) = (92, 7)$;
   (g) $(n, b) = (35, 4)$.
5. Si trovino tutti i divisori dei numeri 121, 513, 2019, 2020, 482 e 143.
6. Si calcoli il massimo divisore comune fra a e b, dove:

(a) $a = 28$ e $b = 32$;
(b) $a = 121$ e $b = 143$;
(c) $a = -2020$ e $b = 482$;
(d) $a = 96$ e $b = -52$;
(e) $a = -512$ e $b = -64$;
(f) $a = 312$ e $b = 96$;
(g) $a = 272$ e $b = 123$.

7. Si determini se esistono soluzioni per le seguenti equazioni. In caso positivo, si trovi una soluzione.

(a) $35x + 20y = 25$
(b) $42x + 15y = 21$
(c) $22x + 33y = 7$
(d) $45x + 72y = 36$
(e) $12x + 5y = 13$
(f) $32x + 12y = 8$
(g) $81x + 54y = 3$

8. Si calcolino

(a) $\phi(32)$
(b) $\phi(47)$
(c) $\phi(96)$
(d) $\phi(2020)$
(e) $\phi(575)$
(f) $\phi(1024)$
(g) $\phi(888)$

9. Sia n un intero positivo fissato. Si dimostri che per ogni interi x e y abbiamo:

(a) $n|x \wedge n|y \Rightarrow n|xy$
(b) $n|x \wedge n|y \Rightarrow n|x + y$

10. Per ogni a e n elencati, si trovi un numero b tali che $0 \leq b < n - 1$ tale che $a \equiv b \pmod{n}$

(a) $a = 10$, $n = 4$;
(b) $a = -3$, $n = 5$;
(c) $a = -23$, $n = 6$;
(d) $a = 14$, $n = 7$;
(e) $a = 74$, $n = 12$;
(f) $a = -55$, $n = 11$;
(g) $a = -83$, $n = 5$.

Alcune soluzioni del Foglio 3

7. Scrittura di permutazioni come prodotto di cicli disgiunti.

(a) (576)
(b) (24735)
(c) (126457)
(d) (124673)
(e) (13)(2564)
(f) (12764)(35)