Teoria dei segnali

Mauro Fadda (mauro.fadda@unica.it)

Università degli Studi di Sassari

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Crediti: 6

Prove ripetute

- Più esperimenti
- Stesso esperimento più volte.
- Prodotto **cartesiano** $S = S_1 \times S_2 \times \ldots$

- Esempio: lancio della moneta N volte
  - Prodotto cartesiano per N=3 ?
  - Probabilità che si verifichi l'evento "TCT" ?
  - Probabilità che si verifichi l'evento "è uscito croce due volte" ?

Prove ripetute

- Esperimenti indipendenti

$$P(A_1 \times A_2 \times \ldots) = P_1(A_1)P_2(A_2)\ldots$$

- Probabilità che lanciano una moneta e un dado esca “T e 5”

Prove ripetute

- Lancio la moneta N=5 volte
  - T C C T C
- Calcolare la probabilità dell'evento "si presenta T due volte"
  - T T C C C
  - T C T C C
  - T C C T C
  - ....

– (In quanti modi **k** gettoni possono occupare **n** celle?)

Prove di Bernoulli

- Prove di Bernoulli o Prove ripetute

- Supponiamo di voler ripetere un medesimo esperimento diverse volte, e di voler misurare quante volte si verifichi un certo esito su tutte le prove effettuate
- Questo problema va sotto il nome di prove ripetute

- Bisogna fare attenzione che il risultato di ciascuna prova non influenzi le successive, ossia che le singole prove siano tra di loro <u>indipendenti</u>.

- La formula da utilizzare in questi casi è la formula di Bernoulli: se l'evento da noi indagato ha una probabilità p di verificarsi per ciascuna prova, ed effettuiamo n prove indipendenti, la probabilità che l'evento si verifichi k volte (con $k \leq n$) è data da

Prove di Bernoulli

- Prove di Bernoulli o Prove ripetute

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad p + q = 1$$

$$p_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Esercizio

- Da un mazzo di 40 carte si prende 1 carta e si reinserisce nel mazzo. Qual è la probabilità che ripetendo l'esperimento 3 volte vi sia uno ed un solo asso?

$$p = \frac{k}{n} = \frac{4 \cdot 3 \cdot D'_{36,2}}{D'_{40,3}} = \frac{243}{1000} = 0.243$$

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{3}{1} \left(\frac{4}{40}\right)^1 \left(\frac{36}{40}\right)^2 = 0.243$$

Disposizioni con ripetizione

Definizione. Dati n elementi distinti e un numero k qualunque, si dicono disposizioni con ripetizione $D'_{n,k}$ di questi n elementi, presi a k a k, tutti i gruppi che si possono formare con gli elementi dati, in modo che ogni gruppo contenga k elementi anche non distinti e due gruppi qualunque differiscano fra loro per qualche elemento oppure per l'ordine in cui gli elementi sono disposti.

$$D'_{n,k} = n^k$$

Problema

- Una borsa contiene una pedina, non si sa se bianca (b) o nera; si mette una pedina bianca nella borsa, e la si agita.
  - Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca?

$$P(B) = P(B|b) * P(b) + P(B|\bar{b})P(\bar{b}) =$$
$$1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

- Poi si estrae una pedina, che risulta bianca.
  - Quante probabilità ci sono ora di estrarre una pedina bianca?

$$P(b|B) = \frac{P(B|b)P(b)}{P(B)} = \frac{1 \cdot 1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$$

Problemi

- Lanciando due dadi regolari con facce numerate da 1 a 12, la probabilità che la somma dei valori delle facce sia 13 è ?
  - Risposta: 1/12
- Si lanciano due dadi; la probabilità che il punteggio del primo dado sia strettamente minore di quello del secondo è:
  - Risposta: 5/12
- Un ragazzo ha in tasca due gettoni telefonici e una lista di numeri telefonici di 5 amici, 3 ragazzi e 2 ragazze, senza sapere a chi corrispondono. Qual è la probabilità che, telefonando a caso a due dei cinque numeri, il ragazzo riesca a parlare con almeno una delle sue amiche?
  - Risposta: 7/10
- Ci sono due scatole. La prima contiene 1000 lampadine, delle quali il 10% è difettoso. La seconda, invece, contiene 2000 lampadine, di cui il 5% è difettoso. Due lampadine sono prese da una scatola scelta a caso. (a) Si trovi la probabilità che entrambe le lampadine siano difettose. (b) Supponendo che siano entrambe difettose, si trovi la probabilità che provengano dalla prima scatola.
  - (a) 0.0062; (b) 0.798