

Esercizi per il Corso di MATEMATICA DISCRETA

Foglio 3

11 ottobre 2019

1. Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione. Si dimostri che
 - (a) se f è invertibile a destra, allora f è suriettiva.
 - (b) se f è invertibile con inversa f^{-1} e $g: Y \longrightarrow Z$ è una funzione invertibile con inversa g^{-1} allora $g \circ f$ è invertibile con inversa $f^{-1} \circ g^{-1}$.
2. Si determini se le seguenti funzioni sono invertibili a sinistra, a destra o entrambe. In caso positivo si trovi la funzione inversa/inversa a sinistra/inversa a destra.
 - (a) $a: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $a(n) = 2n$.
 - (b) $b: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definita da $b(n) = 2n$.
 - (c) $c: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $c(n) = n - 5$.
 - (d) $d: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $d(n) = (-1)^n$.
 - (e) $e: \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 1\}$ definita da $e(n) = (-1)^n$.
 - (f) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = (-1)^n n$.
3. Si trovino esempi di:
 - (a) Due funzioni $f: X \longrightarrow Y$ e $g: Y \longrightarrow Z$ tali che $g \circ f$ sia iniettiva ma g non sia iniettiva.
 - (b) Due funzioni $f: X \longrightarrow Y$ e $g: Y \longrightarrow Z$ tali che $g \circ f$ sia suriettiva ma f non sia suriettiva.
4. Si dimostri che per due insiemi finiti X e Y , $|X| \geq |Y|$ se e solo se esiste una funzione suriettiva $f: X \longrightarrow Y$.
5. Sia X l'insieme degli abitanti di Cagliari. Secondo Wikipedia, questo insieme ha 154106 elementi. Sapendo che la persona più vecchia in tutta Italia ha 114 anni, si dimostri che esistono almeno due abitanti di Cagliari che sono nati precisamente nello stesso giorno.
6. Si determini se i seguenti sono gruppi.
 - (a) $(\mathbb{N}, *)$ dove $a * b = ab + 1$ per ogni a e b in $\mathbb{N}$;
 - (b) $(\mathbb{Z}, *)$ dove $a * b = a - b$ per ogni a e b in $\mathbb{Z}$;
 - (c) $(\mathbb{R}, *)$ dove $a * b = ab$ per ogni a e b in $\mathbb{R}$;
 - (d) $(\{-1, 1\}, *)$ dove $a * b = ab$ per ogni a e b in $\{-1, 1\}$;
 - (e) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ dove $a * b = ab$ per ogni a e b in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 - (f) $(\mathbb{R}^2, *)$ dove $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ per ogni (a, b) e (c, d) in $\mathbb{R}^2$;
 - (g) $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, *)$ dove $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$ per ogni (a, b) e (c, d) in $\mathbb{R}^2$;
 - (h) $(\mathbb{S}^1, *)$ dove $\mathbb{S}^1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2: a^2 + b^2 = 1\}$ e $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$ per ogni (a, b) e (c, d) in $\mathbb{S}^1$.

7. Si scriva ognuna delle seguenti permutazioni in S_7 come un prodotto di cicli disgiunti e come un prodotto di trasposizioni. Si trovino le loro permutazioni inverse e si determini se sono permutazioni pari o dispari.
- (a) $(12)(2761)(265)$
 - (b) $(2473)(35)$
 - (c) $(1267)(456)$
 - (d) $(34567)(1234)(34)(45)$
 - (e) $(12)(23)(456)(241)$
 - (f) $(47)(35)(134)(67)(21)(23)$
8. Quanti anagrammi ci sono della parola **CACATUA**? E della parola **ANAGRAMMA**?
9. Si calcolino i coefficienti binomiali: $\binom{7}{4}$, $\binom{5}{2}$ e $\binom{10}{8}$.
10. In una azienda con 10 lavoratori si devono organizzare due commissioni, una con 3 lavoratori e l'altra con 4 lavoratori.
- (a) In quanti modi diversi si possono fare queste scelte in modo tale che le due commissioni non si intersechino?
 - (b) Se, in più, nella seconda commissione si deve nominare un presidente, un vice-presidente e un segretario, in quanti modi diversi si possono scegliere queste due commissioni (in tale modo che non si intersichino)?