



Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria delle Tecnologie per
Internet

OFDM

Orthogonal Frequency Division Multiplexing



Introduzione

- ✓ L'OFDM (ossia multiplazione a divisione di frequenza ortogonale) è una tecnica di modulazione multiportante caratterizzata da:
 - Trasmissione su N portanti equispaziate ed ortogonali
 - Trasmissione QAM su ogni portante
 - Possibilità di allocare dinamicamente il bit rate
 - Realizzazione completamente numerica del modulatore e del demodulatore
 - Semplicità nell'effettuare l'equalizzazione



Introduzione

- ✓ Grazie alle sue proprietà, l'OFDM è stato adottato per:
 - ADSL, cioè una tecnica asimmetrica di trasmissione ad alta velocità che permette, usando un solo doppino, di utilizzare contemporaneamente anche il servizio telefonico tradizionale
 - DVB-T, cioè la trasmissione broadcast terrestre del segnale televisivo digitale



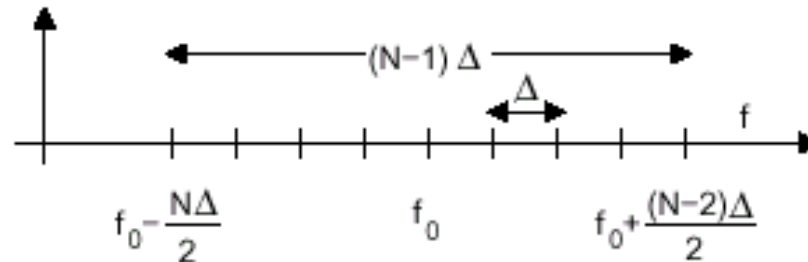
Motivazioni

- ✓ Elevato bit-rate nelle applicazioni wireless
- ✓ Superamento delle limitazioni dovute al canale radio
- ✓ Miglioramento generalizzato delle prestazioni in termini di bit-rate



Concetti base

- ✓ Come detto in precedenza, si tratta di una trasmissione a divisione di frequenza, nella quale i diversi canali utilizzano forme d'onda ortogonali.
- ✓ Tutte le diverse frequenze $f_n = f_o + \Delta \cdot (n - \frac{N}{2})$, con $n=0,1,\dots,N-1$, sono utilizzate contemporaneamente e ognuna di esse realizza una modulazione numerica (anche a più livelli, ad esempio QPSK) con impulso NRZ rettangolare.





Concetti base

- ✓ Se indichiamo con $a_n^k = a_{nc}^k + j a_{ns}^k$ le coordinate nel piano dell'involuppo complesso di un determinato punto della costellazione (realizzata per la portante f_n all'istante $t=kT$), possiamo scrivere il segnale OFDM in questo modo:

$$\begin{aligned} x_{OFDM}(t) &= \sum_k \text{rect}_T(t - kT) \sum_{n=0}^{N-1} (a_{nc}^k \cos \omega_n(t - kT) - a_{ns}^k \sin \omega_n(t - kT)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) * \left(\text{rect}_T(t) \sum_{n=0}^{N-1} (a_{nc}^k \cos \omega_n t - a_{ns}^k \sin \omega_n t) \right) \end{aligned}$$

- ✓ Le sommatorie in k e n identificano rispettivamente gli istanti di simbolo e le diverse portanti.



Concetti base

- ✓ L'involuppo complesso di questo segnale sarà dato da:

$$\underline{x}_{OFDM}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) * \left(\text{rect}_T(t) \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n^k e^{j2\pi[\Delta(n-N/2)]t} \right)$$

- ✓ La durata T di un simbolo non è vincolata ad un valore particolare ma deve essere rispettata la relazione:

$$T \geq T_0 = \frac{1}{\Delta}$$

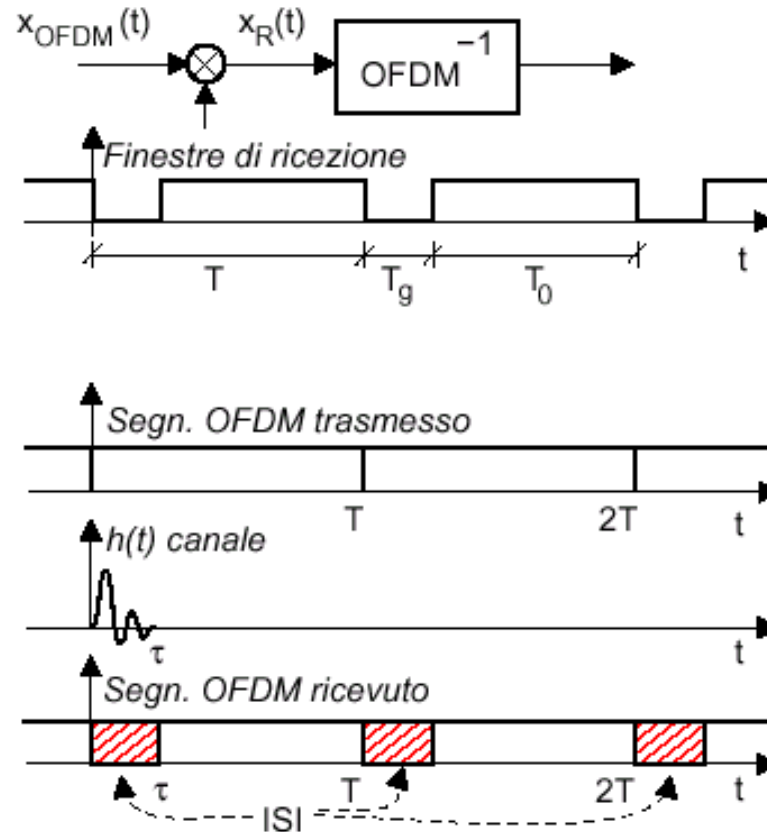


Concetti base

- ✓ Questa specifica è necessaria perché il ricevitore opera sul segnale una finestrazione temporale di ampiezza T_0 in modo da rendere ortogonali tra loro le frequenze f_n e mettere il ricevitore in grado di calcolare i valori \underline{a}_n^k per tutti gli n presenti all'istante $t=kT$, mediante un ricevitore a correlazione.
- ✓ L'intervallo T_0 viene chiamato “periodo principale del simbolo OFDM” mentre la quantità $T_g = T - T_0$ è indicata come “tempo di guardia” o preambolo.



Concetti base





Concetti base

- ✓ Il segnale ricevuto durante il periodo T_g non viene usato in ricezione, questo perché, in presenza di un canale non ideale, la parte iniziale di ogni simbolo risulta corrotta da interferenza intersimbolica (ISI) dovuta al risultato della convoluzione tra la coda del simbolo e l' $h(t)$ del canale.
- ✓ Il periodo T_g è la stima della durata della risposta all'impulso del canale non ideale. Trasmettendo opportuni simboli durante questo periodo si può evitare l'ISI.



Concetti base

- ✓ Vediamo ora l'occupazione in banda, consideriamo un solo simbolo ricevuto nell'intervallo $T_0 = \Delta^{-1} \leq T$, con inviluppo complesso:

$$\underline{x}_{T_0}(t) = \text{rect}_{T_0}(t) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n \cdot e^{j2\pi[\Delta(n-N/2)]t} \quad (1)$$

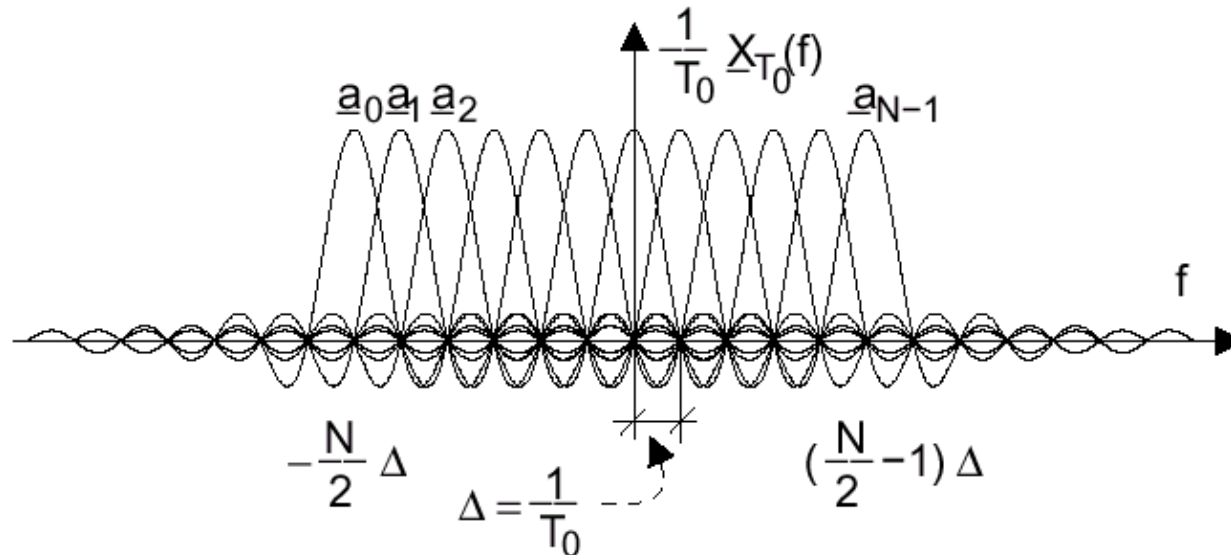
- ✓ Calcolo la trasformata di Fourier e ottengo:

$$\begin{aligned} \underline{X}_{T_0}(f) &= T_0 \text{sinc}(fT_0) * \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n \delta(f - \Delta(n - N/2)) = \\ &= T_0 \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n \text{sinc}((f - \Delta(n - N/2))T_0) \end{aligned} \quad (2)$$



Concetti base

- ✓ Lo spettro che si ottiene è il seguente:

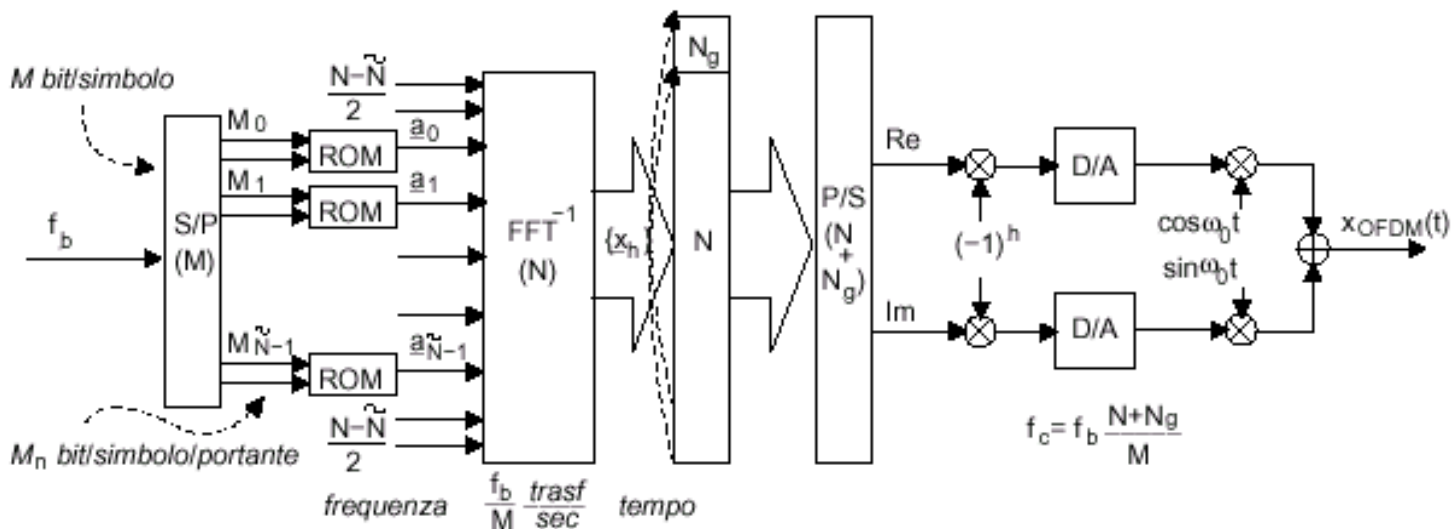


- ✓ Come si vede, ogni sinc viene moltiplicata per uno dei coefficienti \underline{a}_n che possono essere riottenuti in ricezione campionando (in modo complesso) $\underline{X}(f)$ a passo Δ .



Modulatore OFDM

- ✓ Una delle proprietà più importanti della modulazione OFDM è quella di essere realizzata unicamente mediante circuiti digitali; ecco lo schema completo del modulatore:





Modulatore OFDM

- ✓ Il flusso binario a frequenza f_b viene parallelizzato per formare simboli a $L = 2^M$ livelli ad una frequenza di:

$$f_L = \frac{f_b}{M} = \frac{f_b}{\log_2 L}$$

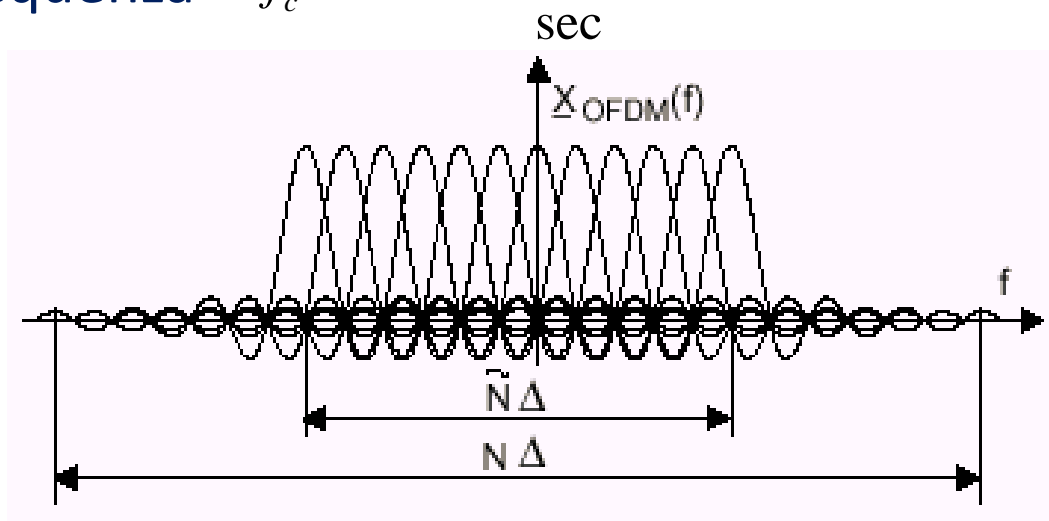
- ✓ Questi M bit/simbolo sono suddivisi in \tilde{N} gruppi di M_n (con $n = 0, 1, \dots, \tilde{N}-1$) bit ciascuno, con:

$$M = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} M_n$$

- ✓ Ogni gruppo di M_n bit produce un punto di costellazione \underline{a}_n scelto tra $L_n = 2^{M_n}$ punti possibili.

Modulatore OFDM

- ✓ Alla sequenza degli \underline{a}_n vengono aggiunti $(N - \tilde{N})/2$ valori nulli all'inizio e alla fine, questo per ottenere una nuova sequenza di N valori \underline{a}_n in modo che la sommatoria in (2) dia luogo ad un involuppo complesso limitato in banda tra $\pm N \cdot \Delta$ Hz; tale involuppo può essere quindi rappresentato dai suoi campioni presi a frequenza $f_c = N \cdot \Delta \frac{\text{campioni}}{\text{sec}}$





Modulatore OFDM

- ✓ Il blocco FFT^{-1} svolge proprio questa operazione, esegue infatti il seguente calcolo:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n e^{j2\pi \frac{n}{N} h} = \frac{1}{(-1)^h} \underline{x}_{T_0} (hT_c)$$

- ✓ Il risultato della FFT^{-1} è quindi una sequenza di coefficienti complessi \underline{x}_h che a meno di un segno alterno sono uguali all'involuppo complesso fornito dalla (1) relativo ad un simbolo.



Modulatore OFDM

- ✓ Il valore $\underline{x}_{T_0}(hT_c)$ può essere scritto in questo modo:

$$\begin{aligned}\underline{x}_{T_0}(hT_c) &= \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n \cdot e^{j2\pi[\Delta(n-N/2)]hT_c} = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n \cdot e^{j2\pi[\Delta n]h\frac{1}{N\Delta}} \cdot e^{-j2\pi[\Delta N/2]h\frac{1}{N\Delta}} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n \cdot e^{j2\pi\frac{n}{N}h} e^{-j\pi h} = (-1)^h \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n \cdot e^{j2\pi\frac{n}{N}h}\end{aligned}$$

- ✓ Questo è il motivo per cui bisogna inserire il fattore $(-1)^h$ dopo il calcolo della FFT^{-1} .



Modulatore OFDM

- ✓ Il preambolo da trasmettere durante T_g si ottiene aggiungendo in testa alla sequenza degli \underline{x}_h un gruppo di campioni prelevati dalla coda; si dimostra infatti che così si evita l'interferenza intersimbolica dovuta alla non idealità del canale.
- ✓ La parti reali e immaginarie della sequenza degli \underline{x}_h sono inviate ad una coppia di convertitori digitale/analogico, operanti a

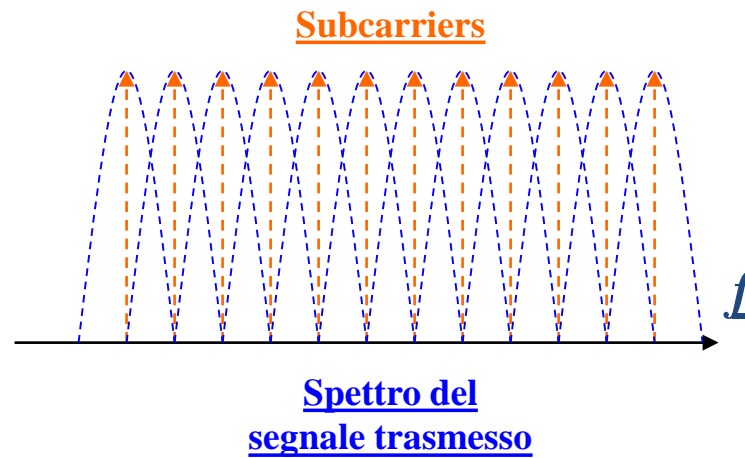
$$f_c = \frac{N + N_g}{T}$$

le cui uscite sono utilizzate per produrre il segnale $x_{OFDM}(t)$ mediante una coppia di modulatori in fase e quadratura.



Equalizzazione di un segnale OFDM

- ✓ Il segnale trasmesso dal modulatore ha il seguente spettro:



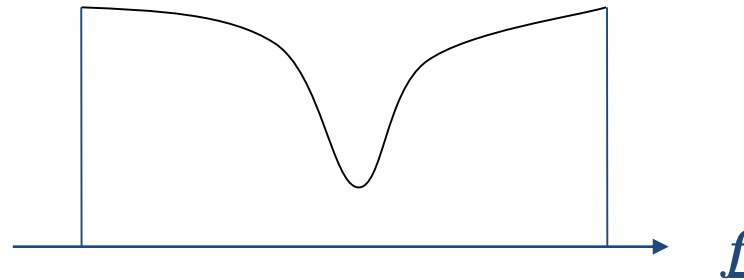
- ✓ Se il canale ha una risposta in frequenza il cui modulo non è costante e la cui fase non è lineare, è necessario eseguire un'operazione di equalizzazione.



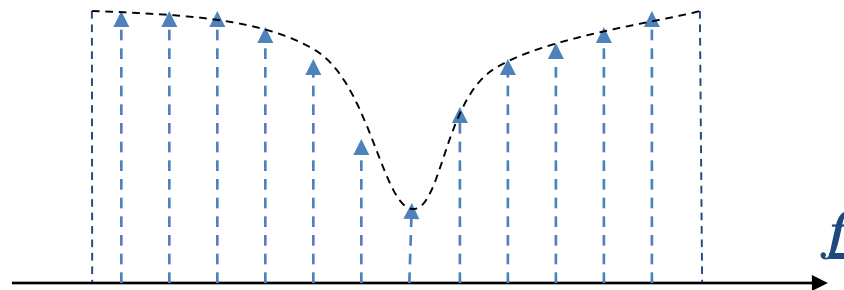
Equalizzazione di un segnale OFDM

- ✓ Supponiamo di avere un canale di questo tipo:

Canale selettivo in frequenza



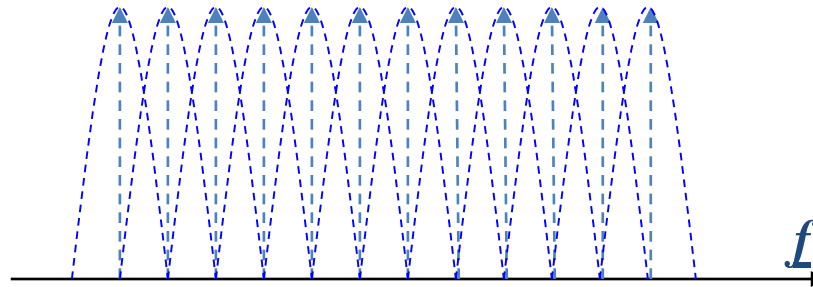
- ✓ Avremo che il segnale in ricezione avrà il seguente spettro:





Equalizzazione di un segnale OFDM

- ✓ L'equalizzazione, amplificando le componenti in frequenza che sono state maggiormente attenuate dal canale, ci consente di recuperare la forma dello spettro del segnale trasmesso e riottenere i campioni corretti.

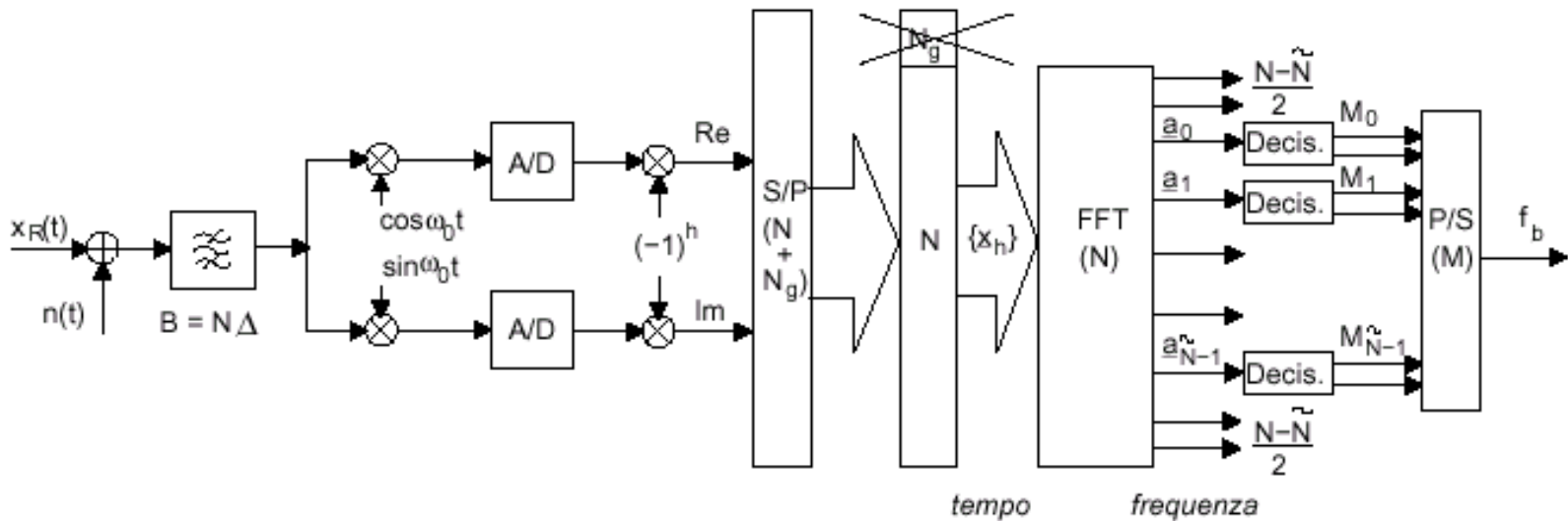


Campioni corretti



Demodulatore OFDM

- ✓ Per ottenere la sequenza degli elementi \underline{a}_n e quindi il gruppo di M bit che hanno originato il simbolo, si utilizza il seguente schema di demodulazione:





Demodulatore OFDM

- ✓ Il ricevitore deve acquisire il sincronismo di simbolo per determinare l'inizio della ricezione di un singolo blocco di campioni.
- ✓ Il segnale ricevuto viene demodulato in fase e quadratura e campionato a frequenza $f_c = (N + N_g)/T$
- ✓ Dopo aver effettuato l'inversione di segno ad indici alterni, vengono rimossi i $f_c \cdot T_g = N_g$ campioni del preambolo.



Demodulatore OFDM

- ✓ Una FFT permette di ottenere i valori:

$$\frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} \underline{x}_h e^{-j2\pi \frac{h}{N} n} = \underline{X}_{T_0} \left(\left(n - \frac{N}{2} \right) \Delta \right) = \underline{a}_n$$

- ✓ Solo gli \tilde{N} valori centrali sono avviati verso altrettanti decisori, i quali determinano il punto della costellazione più vicino all' \underline{a}_n ricevuto per ogni portante, lo codificano con M_n bit, ed il risultato finale è reso seriale per produrre gli M bit che hanno dato origine al simbolo.



Efficienza dell'OFDM

- ✓ L'efficienza si ottiene considerando che solo \tilde{N} portanti su N trasportano informazione, e che solo $f_c \cdot T_0$ campioni su $f_c \cdot T$ sono unici.
- ✓ Avremo quindi:

$$\rho = \frac{\tilde{N} T_0}{N T} = \frac{\tilde{N} T - T_g}{N T} = \frac{\tilde{N}}{N} \left(1 - \frac{T_g}{T} \right)$$

- ✓ Questa relazione misura la frazione di segnale utile rispetto all'occupazione di banda ed al numero di campioni/simbolo presenti in $x_{OFDM}(t)$.



Efficienza dell'OFDM

- ✓ La ridondanza introdotta (le portanti vuote ed il preambolo) è della stessa natura di quella introdotta dal roll-off di un impulso a coseno rialzato, in quanto ha lo scopo di evitare che si verifichino fenomeni di interferenza tra simboli
- ✓ Si nota facilmente che l'efficienza aumenta all'aumentare di T e di N , dato che T_g e $N - \tilde{N}$ sono fissi.



Peak-to-Average Power Ratio (PAPR)

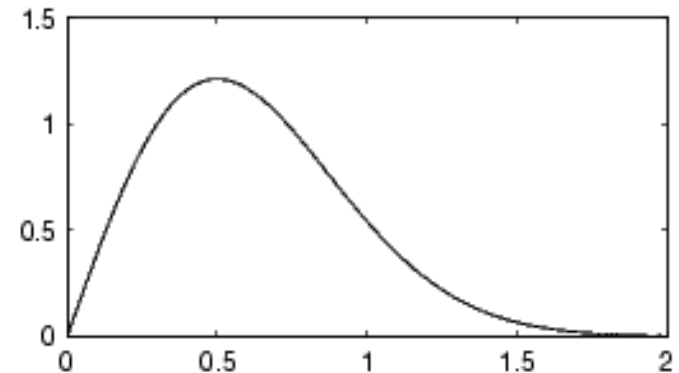
- ✓ Proprietà del PAPR
- ✓ Clipping e filtraggio
- ✓ Selective Mapping
- ✓ Partial Transmit Sequence
- ✓ Codifica



Proprietà del PAPR

- ✓ Il modulo dell'involuppo complesso risultante dalla sovrapposizione di N simboli indipendenti, con $N \gg 1$, ha una funzione densità di probabilità che può essere approssimata da una distribuzione di Rayleigh

$$f(x) = \left(\frac{x}{b^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)$$





Proprietà del PAPR

- ✓ Il PAPR (Peak-to-Average Power Ratio) è definito come il rapporto tra la potenza di picco e la potenza media di un segnale
- ✓ Per un segnale $x(t)$, definito per t compreso tra 0 e T , il PAPR è espresso dalla seguente formula, dove N è il numero delle portanti:

$$PAPR = \frac{\max_{0 < t < T} |x(t)|^2}{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt} = N$$



Proprietà del PAPR

- ✓ All'aumentare di N , aumenta il PAPR
 - Problemi per le non linearità degli amplificatori
 - ❖ Ogni volta che si raggiunge il livello di saturazione si ha una distorsione del segnale e quindi aumenta il bit error rate
 - ❖ La distorsione del segnale causa un aumento dell'occupazione di banda e quindi riduce l'efficienza spettrale
 - Amplificatori con alte potenze di picco sono meno efficienti dal punto di vista energetico (problema soprattutto per terminali mobili) e hanno un SNR più basso



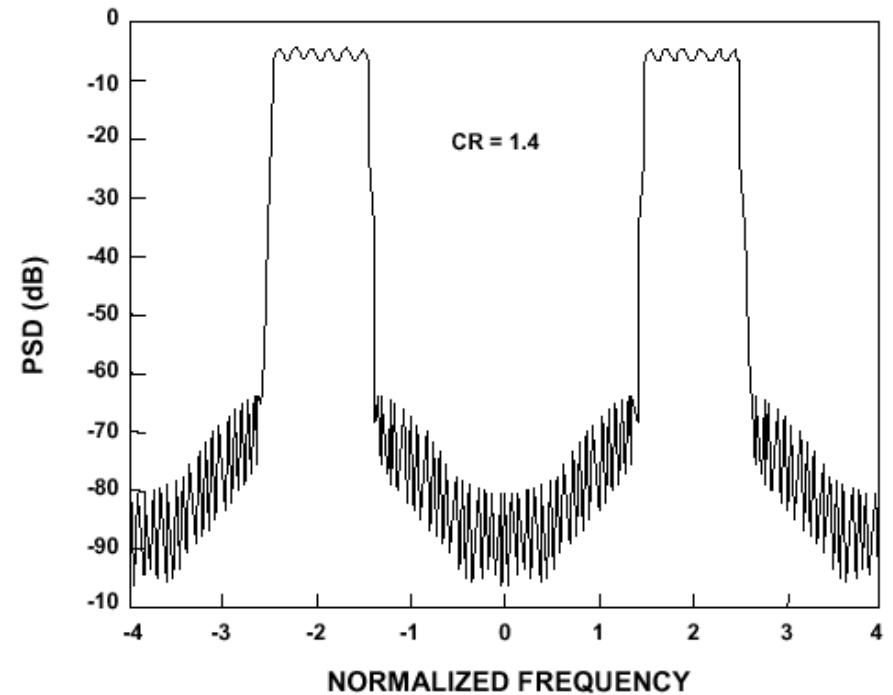
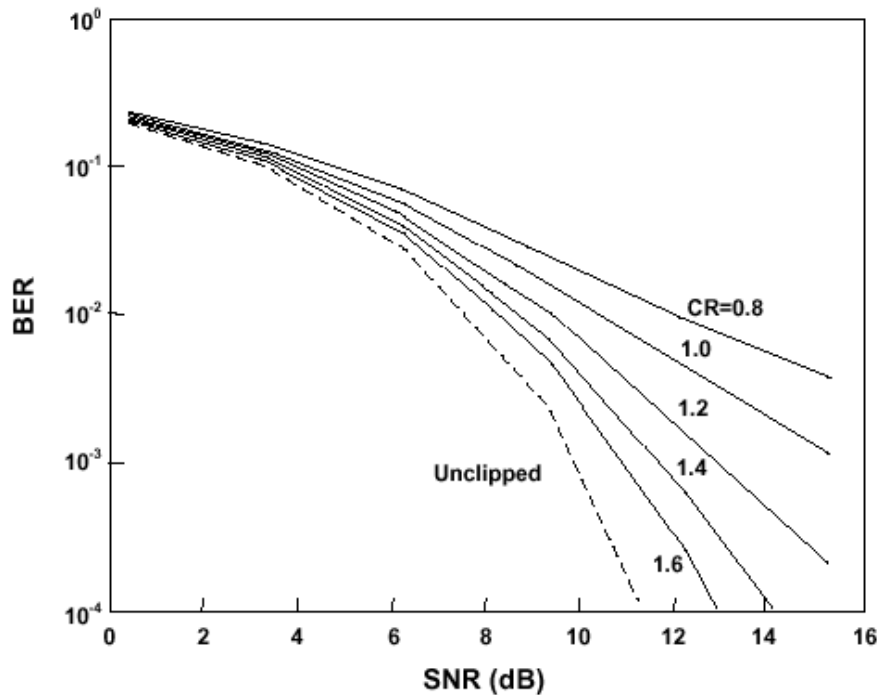
Clipping e filtraggio

- ✓ “Clipping” di un segnale: operazione che “taglia” tutti i valori del segnale che superano una certa soglia
 - CR (Clipping Ratio): rapporto tra valore di soglia e valore quadratico medio del segnale originale
- ✓ Il clipping introduce una distorsione del segnale (in-band noise) e un allargamento dello spettro (spectral spreading)
- ✓ Per eliminare lo spectral spreading si può eseguire un filtraggio
 - aumenta di nuovo il valore di picco del segnale
- ✓ Occorrono tecniche più sofisticate



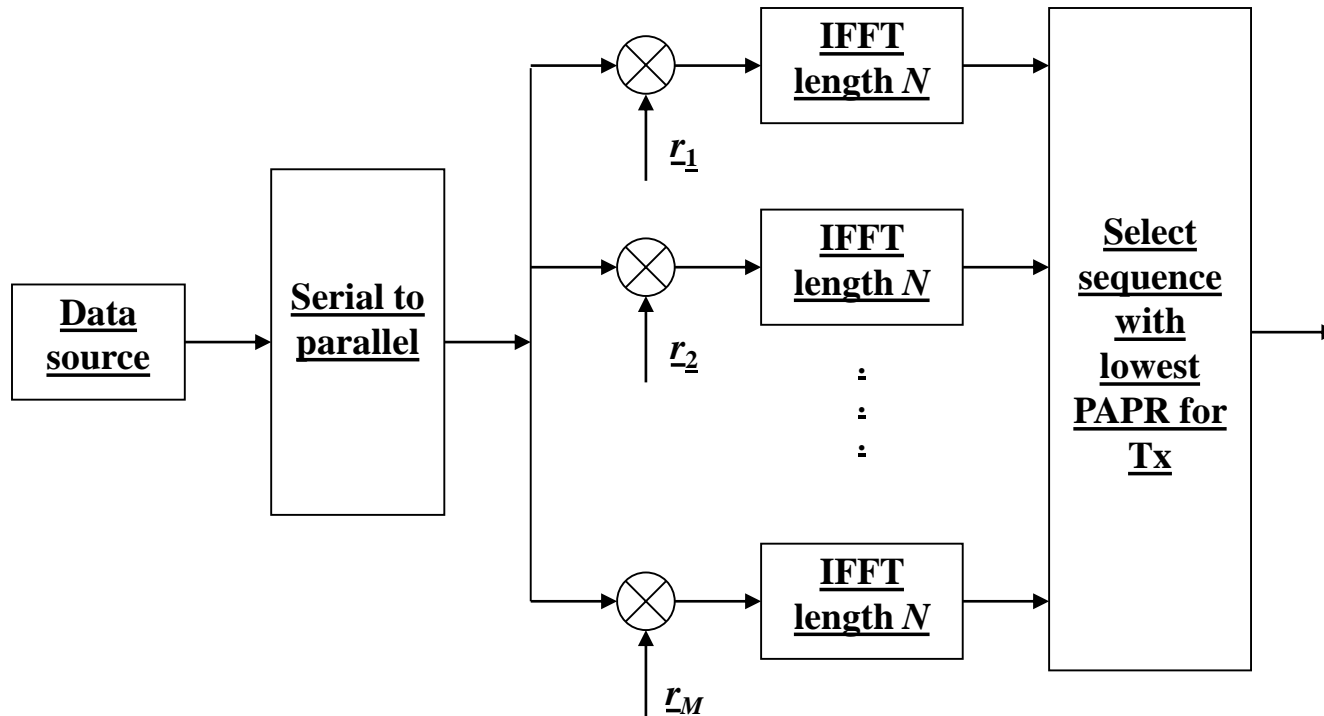
Clipping e filtraggio

- ✓ Bit error rate e densità spettrale di potenza di un segnale sottoposto a clipping





Selective Mapping



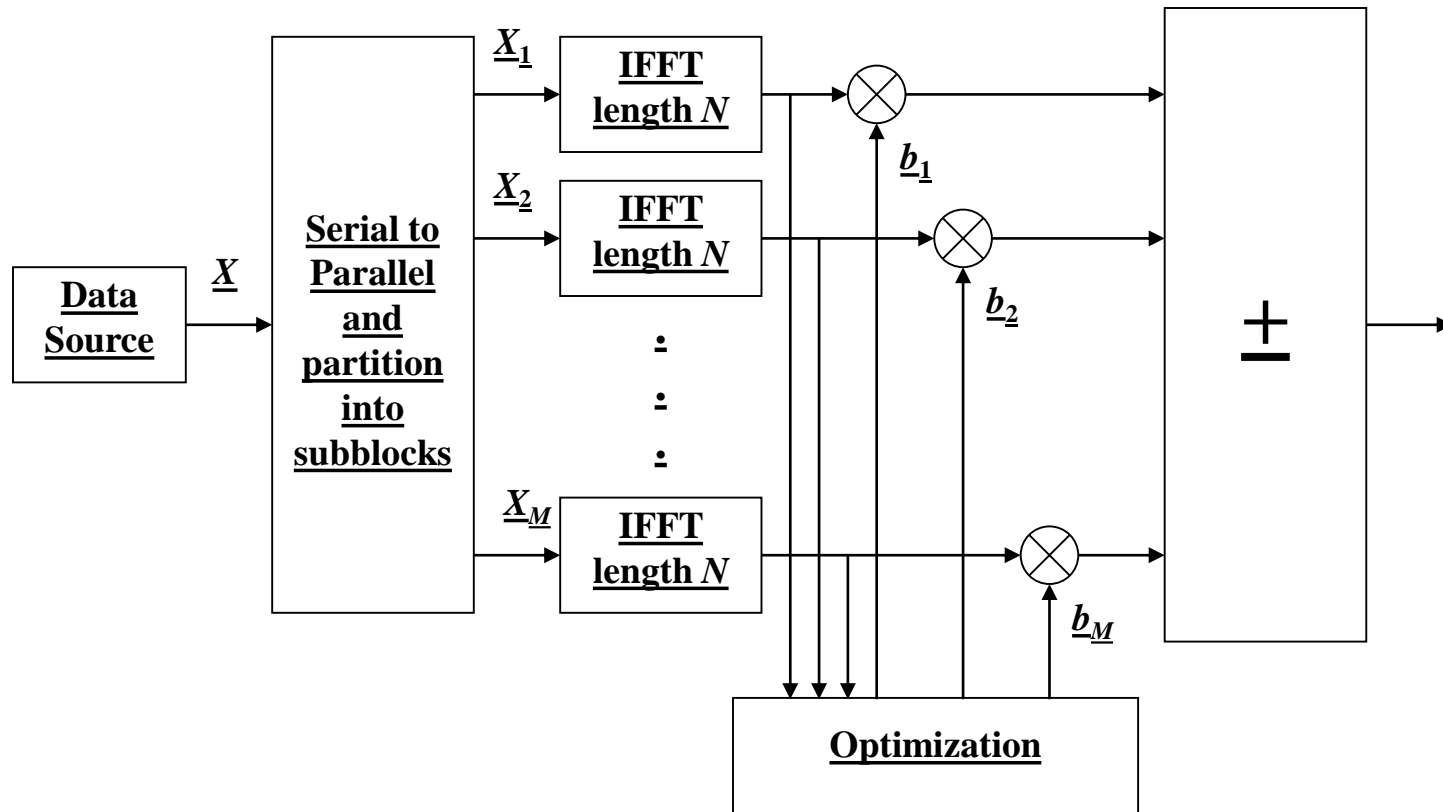


Selective Mapping

- ✓ Ciascun insieme di N simboli da trasmettere viene moltiplicato per un certo numero M di sequenze r_i di numeri complessi
- ✓ Le componenti delle sequenze r_i sono del tipo $\exp(j\phi_j)$
- ✓ Si esegue la IFFT (Inverse Fast Fourier Transform, FFT^{-1}) di ciascuno degli M vettori ottenuti
- ✓ Si confronta il PAPR dei segnali ottenuti e si trasmette quello con il PAPR più basso
- ✓ E' necessario trasmettere al ricevitore anche la sequenza corrispondente al segnale che si è scelto



Partial Transmit Sequence





Partial Transmit Sequence

- ✓ Ciascun insieme di N simboli viene suddiviso in M blocchi
- ✓ Si esegue la IFFT (di lunghezza N) di ciascun blocco
- ✓ Un algoritmo di ottimizzazione moltiplica ogni IFFT per un coefficiente b_i , del tipo $\exp(j\phi_i)$
- ✓ Si trasmette la somma delle IFFT modificate
- ✓ I coefficienti b_i sono calcolati in modo da minimizzare il valore di picco delle componenti della somma delle IFFT
- ✓ E' necessario trasmettere al ricevitore anche i coefficienti b_i



Codifica

- ✓ Prima del calcolo della IFFT, ciascun insieme di N simboli viene convertito in un insieme di N' simboli, con $N' > N$
- ✓ L'algoritmo di conversione fa in modo che, per ogni possibile sequenza di simboli in ingresso, la sequenza di simboli dopo la codifica non corrisponda a segnali con alti valori di picco
- ✓ La codifica ridondante permette anche la correzione d'errore
- ✓ Applicabile solo per un numero di portanti piccolo



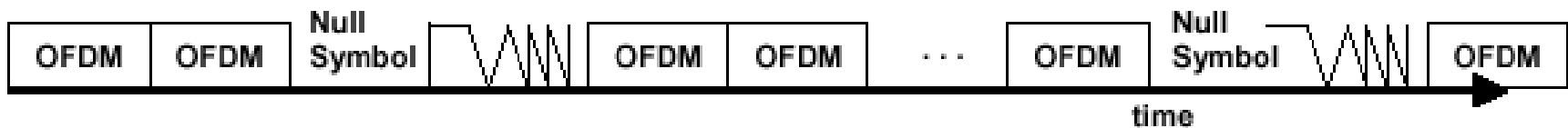
Sincronizzazione nel tempo e in frequenza

- ✓ Desincronizzazione temporale: Inter Symbol Interference (ISI)
- ✓ Offset di frequenza: Inter Channel Interference (ICI)
- ✓ Stima dell'offset di tempo
 - Metodi basati su segnali pilota
 - Metodi non basati su segnali pilota
- ✓ Stima dell'offset di frequenza



Stima dell'offset di tempo

- ✓ Un metodo basato su un segnale pilota prevede la trasmissione di un segnale nullo all'inizio di ogni gruppo di simboli OFDM
- ✓ Il ricevitore si sincronizza con il trasmettitore tramite la rivelazione del segnale nullo





Stima dell'offset di tempo

- ✓ Un altro metodo di sincronizzazione basato su un segnale pilota utilizza una sequenza pseudo-casuale di simboli, che viene trasmessa sul canale
- ✓ Tale sequenza deve essere conosciuta dal ricevitore, che calcola la correlazione tra il segnale ricevuto e la sequenza
- ✓ Per le proprietà dei segnali aleatori, tale correlazione ha un picco quando i due segnali sono allineati
- ✓ La sincronizzazione avviene tramite la rivelazione del picco della correlazione



Stima dell'offset di tempo

- ✓ La tecnica di Schmidl utilizza un simbolo OFDM costituito da due gruppi identici di $N/2$ simboli ciascuno trasmessi in sequenza
- ✓ Calcolando la correlazione tra simboli spaziatati tra loro di $N/2$ si osserva un picco di durata pari a $N/2$ simboli
- ✓ L'inizio del picco individua l'inizio del simbolo OFDM



Stima dell'offset di tempo

- ✓ Una tecnica che non fa uso di segnali pilota sfrutta la ridondanza nel prefisso ciclico per stimare l'offset di tempo
- ✓ Il prefisso ciclico, o estensione ciclica, è l'insieme di simboli trasmessi durante il tempo di guardia T_g tra un simbolo OFDM e il successivo
- ✓ Detta N_g la lunghezza del prefisso ciclico, il suo contenuto è una replica degli ultimi N_g simboli del gruppo di N simboli
- ✓ Analizzando la correlazione tra simboli spaziati tra loro di N , si rivela un picco di durata pari a N_g simboli

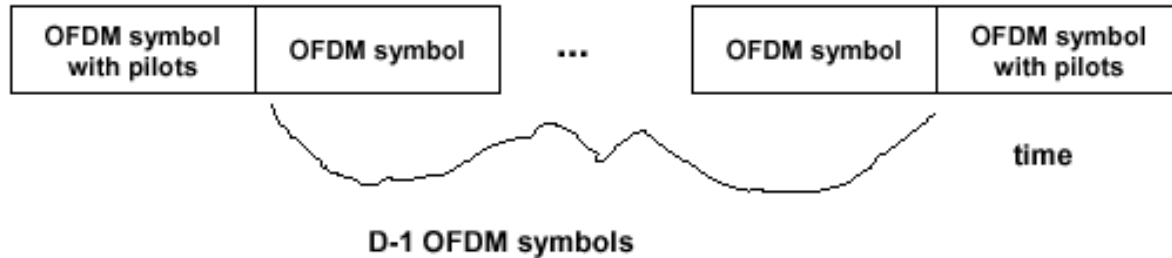


Stima dell'offset di frequenza

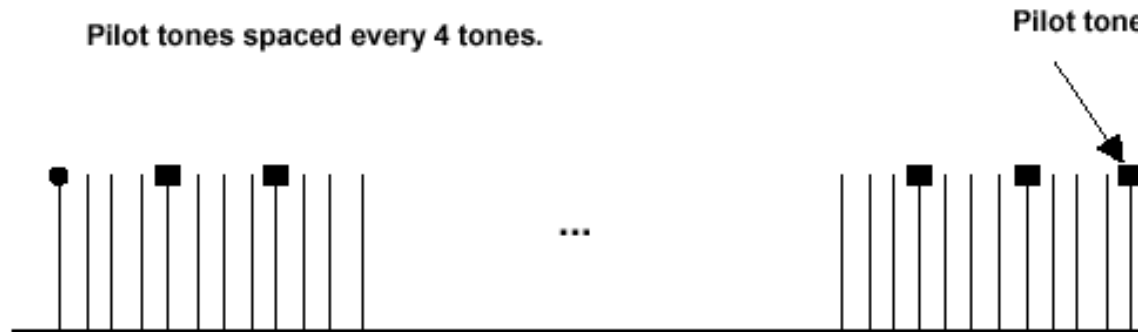
- ✓ L'offset di frequenza consiste nella differenza tra la frequenza di portante usata dal trasmettitore e quella usata dal ricevitore; a questo può aggiungersi un eventuale spostamento in frequenza dovuto all'effetto Doppler
- ✓ E' un problema serio nei sistemi multi-portante come OFDM
- ✓ L'offset tollerabile è dell'ordine dell'1% della spaziatura tra le sottoportanti
- ✓ I sistemi a basso costo non hanno questa precisione
 - Sono necessarie tecniche di compensazione dell'offset



Stima dell'offset di frequenza



Frequency domain of an OFDM pilot symbol





Stima dell'offset di frequenza

- ✓ Nello schema precedente, un segnale pilota viene trasmesso ogni D simboli OFDM
- ✓ Il segnale pilota, che deve essere noto al ricevitore, consiste di diversi toni in frequenza
- ✓ Per effetto dell'offset di frequenza, tali toni appaiono al ricevitore spostati di una quantità pari all'offset, che può essere quindi stimato