Jorge Vitória, email: jorge.vitoria@unica.it
Università di Studi di Cagliari, 2019/2020
Corso di Laurea in Informatica

Esercizi per il Corso di MATEMATICA DISCRETA

Foglio 2
4 ottobre 2019

1. Siano $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{\bullet, \Diamond, \bigcirc\}$ due insiemi. Si indichi se le seguenti affermazioni sono vere o false. Si giustifichi la risposta.
   (a) Il prodotto cartesiano $A \times B$ ha 6 elementi.
   (b) La coppia ordinata (a, b) appartiene a $A \times B$.
   (c) La coppia ordinata $(\Diamond, c)$ appartiene a $A \times B$.
   (d) L'insieme $\{x \in A : (x, \bullet) \in A \times B\}$ ha 3 elementi.
   (e) L'insieme $\{y \in B : (b, y) \in A \times B\}$ ha 2 elementi.
   (f) L'insieme $A \times B$ e l'insieme $B \times A$ hanno lo stesso numero di elementi.
   (g) Il sottoinsieme $\{(a, c), (c, c), (c, a), (a, a)\}$ di A^2 è una relazione di equivalenza su A e $[a] = \{a, c\} = [c]$ e $[b] = \{b\}$.
   (h) L'insime $(A \cup B) \times (A \cup B)$ è uguale a $(A \times B) \cup (B \times A)$
2. Sia $A = \{a, b, c\}$.
   (a) Si elenchino tutte le relazioni su A
   (b) Si elenchino tutte le relazioni di equivalenza su A (e si dimostri che sono veramente relazioni di equivalenza).
   (c) Per ogni relazione di equivalenza elencata, si trovino le classi di equivalenza $[x]$ per ogni elemento x di A.
3. Si considerino le seguenti relazioni sui numeri naturali, e si indichi quali di loro sono relazioni di equivalenze. Per ogni relazione di equivalence trovata, si indichino le classi di equivalenza $[x]$ per ogni x in $\mathbb{N}$. Si giustifichino tutte le risposte.
   (a) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : b - a = 1\}$
   (b) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : b - a \text{ è dispari}\}$
   (c) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : b - a = 0\}$
   (d) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : \sqrt{ab} \in \mathbb{N}\}$
   (e) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : b \geq a\}$
   (f) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : b - a \text{ finisce in } 3\}$
   (g) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : b - a \text{ finisce in } 0\}$
4. (a) Sia $a \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $a(n) = 2n$. Si determinino $\mathsf{Im}(a)$, $a^{-1}(2)$ e $a^{-1}(1)$. La funzione a è iniettiva? Suriettiva? biiettiva?
   (b) Sia $b \colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ la funzione definita da $b(n) = 2n$. Si determinino $\mathsf{Im}(b)$, $b^{-1}(2)$ e $b^{-1}(1)$. La funzione b è iniettiva? Suriettiva? biiettiva?
   (c) Sia $c \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $c(n) = n - 5$. Si determinino $\mathsf{Im}(c)$, $c^{-1}(2)$ e $c^{-1}(1)$. La funzione c è iniettiva? Suriettiva? biiettiva?
   (d) Sia $d \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $d(n) = (-1)^n$. Si determinino $\mathsf{Im}(d)$, $d^{-1}(-1)$ e $d^{-1}(1)$. La funzione d è iniettiva? Suriettiva? biiettiva?

(e) Sia $e\colon \mathbb{N} \longrightarrow \{-1,1\}$ la funzione definita da $e(n) = (-1)^n$. Si determinino $\mathsf{Im}(e)$, $e^{-1}(-1)$ e $e^{-1}(1)$. La funzione e è iniettiva? Suriettiva? biiettiva?

(f) Sia $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(n) = (-1)^n n$. Si determinino $\mathsf{Im}(f)$, $f^{-1}(\mathbb{N})$ e $f^{-1}(\{-2,-1,0,1,2\})$. La funzione f è iniettiva? Suriettiva? biiettiva?

5. Per ogni funzione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si consideri il sottoinsieme Γ_f di $\mathbb{R}^2$ definito da

$$\Gamma_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

Questo sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ si chiama **il grafico di** f. In particolare, Γ_f è una relazione su $\mathbb{R}$.

(a) Si dimostri che se $f(x) = x$, allora Γ_f è una relazione di equivalenza.

(b) Si dimostri che se Γ_f è una relazione di equivalenza, allora $f(x) = x$.

(c) Nel caso in cui $f(x) = x$ si determini la classe di equivalenza per la relazione di Γ_f di ogni $x \in \mathbb{R}$.

6. Prendendo le funzioni dell'esercizio 4, si determinino le seguenti funzioni composte:

(a) $c \circ a$

(b) $a \circ c$

(c) $c \circ d$

(d) $a \circ f$

7. Siano $f\colon X \longrightarrow Y$ e $g\colon Y \longrightarrow Z$ due funzioni. Si dimostri che

(a) Se f e g sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva;

(b) Se f e g sono suriettive, allora $g \circ f$ è suriettiva;

(c) Se $g \circ f$ è suriettiva, allora g è suriettiva;

(d) Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva;

(e) Se f e g sono biiettive, allora $g \circ f$ è biiettiva;