Jorge Vitória, email: jorge.vitoria@unica.it
Università di Studi di Cagliari, 2019/2020
Corso di Laurea in Informatica

Esercizi per il Corso di MATEMATICA DISCRETA

Foglio 1
27 settembre 2019

1. Siano $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$ sottoinsiemi dei numeri naturali. Si determinino tutti gli elementi dei seguenti sottoinsiemi:
   (a) $B \cap C$
   (b) $A \setminus (B \cap C)$
   (c) $B \cup C$
   (d) $A \setminus (B \cup C)$
2. Siano A e B sottoinsiemi di un insieme U. Si dimostri che:
   (a) $A \cup B \subseteq U$;
   (b) $A \cap B \subseteq U$;
   (c) $U \setminus (U \setminus A) = A$
3. Siano P, Q e R proposizioni. Si dimostri che
   (a) $P \wedge Q = Q \wedge P$
   (b) $P \vee Q = Q \vee P$
   (c) $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$
   (d) $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$
   (e) $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
   (f) $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$
4. Siano A, B e C sottoinsiemi di un insieme U. Si considerino le seguenti preposizioni, per ogni elemento x di U:

   $$P(x) : x \in A \qquad Q(x) : x \in B \qquad R(x) : x \notin C$$

   Attraverso l'uso delle operazioni $\cap$, $\cup$ e $\setminus$, si trovi una descrizione dei seguenti insiemi:
   (a) $\{x \in U : P(x) \wedge Q(x)\}$
   (b) $\{x \in U : P(x) \vee Q(x)\}$
   (c) $\{x \in U : P(x) \vee R(x)\}$
   (d) $\{x \in U : \neg P(x) \wedge (R(x) \wedge P(x))\}$
   (e) $\{x \in U : \neg(P(x) \vee R(x))\}$
5. Si dimostri che le seguenti sono tautologie.
   (a) $P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ (*modus ponens*)
   (b) $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$ (*consequentia mirabilis*)
   (c) $P \wedge Q \Rightarrow P$
   (d) $P \Rightarrow P \vee Q$
   (e) $(P \Rightarrow 0) \Rightarrow \neg P$

6. Si dimostri che le seguenti non sono tautologie.

   (a) $P \Rightarrow P \wedge Q$

   (b) $P \vee Q \Rightarrow P$

7. Si dimostri che per qualsiasi insieme A si ha

   (a) $A \cap \emptyset = \emptyset$

   (b) $A \cup \emptyset = A$

   (c) $\emptyset \subseteq A$

8. Sia $I = \mathbb{N}$ e sia $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. Per ogni $i \in I$, si consideri il sottoinsieme di $\mathcal{U}$ definito da $A_i = [-i, i]$. Si determinino

   (a) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

   (b) $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$