Nome, Cognome e matricola:..

Prima Prova Parziale di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

10 novembre 2017

1. (a) Stabilire per quali valori dei parametri α e β le matrici

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \beta \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

risultano ortogonali e, assegnati i valori trovati, calcolare il numero di condizionamento in norma 1, 2 e infinito di entrambe. Infine, risolvere nel modo più opportuno il sistema lineare $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. $\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = -2$. $k_2(P) = k_2(Q) = 1$, $k_1(P) = k_\infty(P) = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + 1)^2$, $k_1(Q) = k_\infty(Q) = \frac{25}{9}$. $\mathbf{x} = [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}]^T$.

(b) Stabilire per quali valori dei parametri γ e δ le matrici

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & \delta & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

risultano ortogonali e, assegnati i valori trovati, calcolare il numero di condizionamento in norma 1, 2 e infinito di entrambe. Infine, risolvere nel modo più opportuno il sistema lineare $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. $\gamma = \frac{1}{2}$, $\delta = 2$, . $k_2(P) = k_2(Q) = 1$, $k_1(P) = k_\infty(P) = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + 1)^2$, $k_1(Q) = k_\infty(Q) = \frac{25}{9}$. $\mathbf{x} = [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}]^T$.

(c) Stabilire per quali valori dei parametri τ e ω le matrici

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \tau & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau \end{bmatrix} \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & \omega \end{bmatrix}$$

risultano ortogonali e, assegnati i valori trovati, calcolare il numero di condizionamento in norma 1, 2 e infinito di entrambe. Infine, risolvere nel modo più opportuno il sistema lineare $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. $\tau = 1$, $\omega = -1$, . $k_2(P) = k_2(Q) = 1$, $k_1(P) = k_\infty(P) = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + 1)^2$, $k_1(Q) = k_\infty(Q) = \frac{25}{9}$. $\mathbf{x} = [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}]^T$.

2. (a) Dati i tre numeri $a = 5.7876 \cdot 10^{-1}$, $b = 15.93 \cdot 10^{-2}$ e $c = 0.65972$, si calcolino le quantità $r_1 = (a + c) - b$ e $r_2 = a + (c - b)$ in un sistema in virgola mobile in base 10 con un numero di cifre significative pari a 4. Commentare i risultati ottenuti.

(b) Dati i tre numeri $d = 0.57876$, $e = 1.593 \cdot 10^{-1}$ e $f = 65.972 \cdot 10{-}2$, si calcolino le quantità $s_1 = (d + f) - e$ e $s_2 = d + (f - e)$ in un sistema in virgola mobile in base 10 con un numero di cifre significative pari a 4. Commentare i risultati ottenuti.

(c) Dati i tre numeri $g = 57.876 \cdot 10^{-2}$, $h = 0.1593$ e $\ell = 6.5972 \cdot 10{-}1$, si calcolino le quantità $t_1 = (g + \ell) - h$ e $t_2 = g + (\ell - h)$ in un sistema in virgola mobile in base 10 con un numero di cifre significative pari a 4. Commentare i risultati ottenuti.

Soluzione. $\rho_1 = 7.6 \cdot 10^{-4}$, $\rho_2 = 1.7 \cdot 10^{-4}$.

3. (a) Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti, e la prima colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -12, \quad \mathbf{x} = [1, 2, 3]^T, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right]^T.$$

(b) Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti, e la seconda colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -12, \quad \mathbf{x} = [1,1,1]^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \left[\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{3}\right]^T.$$

(c) Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti, e la terza colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -12, \quad \mathbf{x} = [1,0,1]^T, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right]^T.$$