Nome, Cognome e matricola: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
18 Settembre 2018

1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 8x_1 + 2\beta x_3 = -2 \\ \beta x_2 = -1 \\ \beta x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

dove β è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali il metodo di Jacobi converge. Posto $\beta = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$. Risolto il sistema utilizzando il metodo di Gauss, si calcoli l'errore relativo, rispetto alla norma infinito, che si commette utilizzando il metodo iterativo anziché quello diretto.

Soluzione. Il sistema ammette una sola soluzione per $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$ *e il metodo di Jacobi converge per* $-4 < \beta < 4$.
$\mathbf{x}^{(1)} = [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{8}]^T$.
$\mathbf{x} = [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}]^T$, $\mathrm{err}_\infty = \frac{2}{3}$.

2. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & \beta & -3 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Si determinino i valori dei paramentri α e β che rendono A e B l'una l'inversa dell'altra. Assegnati ai parametri i valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle due matrici in norma 1 e ∞. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. A e B sono una l'inversa dell'altra se $\alpha = 1, \beta = 3$.
$k_1(A) = k_1(B) = \frac{25}{2}$, $k_\infty(A) = k_\infty(B) = 16$.
$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = B\mathbf{b} = [1, \frac{1}{2}, 0]^T$.

3. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$ che contiene la radice positiva dell'equazione

$$f(x) = x^2 - (\sqrt{2} - 2)x - 2\sqrt{2} = 0$$

Calcolare le prime due iterate del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterate del metodo di Newton, a partire dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Si calcolino gli errori relativi che si commettono utilizzando il metodo di bisezione e di Newton, rispettivamente.

Soluzione. Le radici sono -2 *e* $\sqrt{2} \simeq 1.4142$, *quindi l'intervallo che contiene la radice positiva è* $[1, 2]$.
$c_3 = \frac{11}{8} = 1.375, x_2 = 1.4158$.
$\mathrm{err}_{\mathrm{bis}} = 0.277 \cdot 10^{-1}, \mathrm{err}_{\mathrm{Newton}} = 0.11 \cdot 10^{-2}$

4. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -3 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare la seconda colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{36}{7} \end{bmatrix}.$

$\mathbf{x} = [\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [-\frac{11}{36}, -\frac{5}{36}, \frac{7}{36}]^T$

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	2

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = 3$. *Soluzione.* $p_4(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{7}{16}x^2 + \frac{5}{8}x$.
$p_4(3) = \frac{3}{4}$.

Nome, Cognome e matricola: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
18 Settembre 2018

1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + \alpha x_3 = -2 \\ \alpha x_2 = -1 \\ \alpha x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali il metodo di Jacobi converge. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$. Risolto il sistema utilizzando il metodo di Gauss, si calcoli l'errore relativo, rispetto alla norma infinito, che si commette utilizzando il metodo iterativo anziché quello diretto.

Soluzione. Il sistema ammette una sola soluzione per $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}\}$ *e il metodo di Jacobi converge per* $-2\sqrt{2} < \alpha < 2\sqrt{2}$.
$\mathbf{x}^{(1)} = [-1, -\frac{1}{2}, -1]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [0, -\frac{1}{2}, 1]^T$.
$\mathbf{x} = [-1, -\frac{1}{2}, 1]^T$, $\text{err}_\infty = 1$.

2. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 2 & \gamma \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determinino i valori dei paramentri γ e δ che rendono A e B l'una l'inversa dell'altra. Assegnati ai parametri i valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle due matrici in norma 1, ∞. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. A e B sono una l'inversa dell'altra se $\delta = 3, \gamma = 2$.
$k_1(A) = k_1(B) = \frac{25}{2}$, $k_\infty(A) = k_\infty(B) = 16$.
$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = B\mathbf{b} = [1, \frac{1}{2}, 0]^T$.

3. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$ che contiene la radice positiva dell'equazione

$$f(x) = x^2 - (\sqrt{3} - 3)x - 3\sqrt{3} = 0$$

Calcolare le prime due iterate del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterate del metodo di Newton, a partire dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Si calcolino gli errori relativi che si commettono utilizzando il metodo di bisezione e di Newton, rispettivamente.

Soluzione. Le radici sono -3 *e* $\sqrt{3} \simeq 1.7321$, *quindi l'intervallo che contiene la radice positiva è* $[1, 2]$.
$c_3 = \frac{13}{8} = 1.625, x_2 = 1.73208$.
$\text{err}_{\text{bis}} = 0.618 \cdot 10^{-1}, \text{err}_{\text{Newton}} = 0.6 \cdot 10^{-5}$

4. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare la terza colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{36}{7} \end{bmatrix}.$
$\mathbf{x} = [\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]^T$, $\mathbf{x}^{(3)} = [\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{7}{12}]^T$

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-3	-2	-1	0	1
y_i	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	1	3

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = 3$.

Soluzione. $p_4(x) = -\frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{36}x^3 + \frac{19}{36}x^2 + \frac{55}{36}x + 1.$
$p_4(3) = \frac{22}{3}.$