

Nome, Cognome e matricola:

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

17 Luglio 2018

1. Si utilizzi la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 & 9 \\ 5 & 3 & 17 & 23 \\ 5 & 5 & 19 & 13 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (8, -8, 6, 0)^T$ e per calcolare il determinante della matrice A . Qual è la complessità computazionale del metodo utilizzato?

Soluzione.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{4} & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 & 9 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = [-1, 1, 1, -1]^T, \det(A) = 4800.$$

La complessità del metodo di Gauss con pivoting è $O(\frac{1}{3}n^3)$.

2. Data la matrice

$$B = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

dire per quali valori dei parametri reali α e β :

- (a) la matrice B è non singolare;
- (b) la matrice B è ortogonale.

Fissato $\alpha = \frac{1}{2}$ dire per quali valori del parametro β :

- (c) la matrice B è strettamente diagonalmente dominante;
- (d) il metodo di Gauß-Seidel risulta convergente, se applicato al sistema lineare $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$.

Motivando opportunamente la risposta, chiarire cosa accomuna e cosa differenzia i risultati ottenuti nei punti (c) e (d).

Soluzione. (a) $\beta \neq 0, \alpha \neq \pm\sqrt{\beta}$; (b) $\alpha = 0 \wedge \beta = \pm 1$;

(c) $\beta < -\frac{1}{2} \wedge \beta > \frac{1}{2}$; (d) $\beta < -\frac{1}{4} \wedge \beta > \frac{1}{4}$.

La condizione (c) è condizione sufficiente per la convergenza del metodo di Gauss-Seidel mentre la condizione (d) è necessaria e sufficiente.

3. Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola la funzione

$$f(x) = 2^{\log_2(x)} + x^2$$

nei punti di ascissa $0, \frac{1}{2}, 1$ e valutarlo nel punto di ascissa $x = 2$.

Soluzione. $p_2(x) = x^2 + x$. $p(2) = 6$.

4. Data l'equazione

$$\log(x) - \sin(x) = 0.$$

si determini l'intervallo $[k, k + 1]$, con k intero, che contiene la sua radice positiva e si indichi l'approssimazione che si ottiene applicando tre iterazioni del metodo di bisezione, partendo dall'intervallo determinato. Quale sarebbe stato l'ordine di convergenza del metodo di Newton?

Soluzione. $k = 2$; $\alpha \approx c_4 = \frac{35}{16} \approx 2,1875$.

Essendo $f'(\alpha) \neq 0$ Newton ha ordine di convergenza 2.

5. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

indicare lo spettro di A , il suo raggio spettrale e calcolare i numeri di condizionamento rispetto alle norme con indice 1 e ∞ .

Soluzione. $\sigma(A) = \{-6, -2, 1\}$, $\rho(A) = 6$, $k_1(A) = \frac{28}{3}$, $k_\infty(A) = 7$.

Nome, Cognome e matricola:

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

17 Luglio 2018

1. Si utilizzi la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 19 & 13 \\ 5 & 3 & 17 & 23 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & 13 & 9 \end{bmatrix}$$

per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (-6, 8, 0, -8)^T$ e per calcolare il determinante della matrice A . Qual è la complessità computazionale del metodo utilizzato?

Soluzione.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 19 & 13 \\ 0 & -4 & -14 & -12 \\ 0 & 0 & -20 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = [1, -1, -1, 1]^T, \det(A) = 4800.$$

La complessità del metodo di Gauss con pivoting è $O(\frac{1}{3}n^3)$.

2. Data la matrice

$$C = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & \delta & \gamma \end{bmatrix}$$

dire per quali valori dei parametri reali γ e δ :

- (a) la matrice C è non singolare;
- (b) la matrice C è ortogonale.

Fissato $\delta = \frac{1}{3}$ dire per quali valori del parametro γ :

- (c) la matrice C è strettamente diagonalmente dominante;
- (d) il metodo di Gauß-Seidel risulta convergente, se applicato al sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$.

Motivando opportunamente la risposta, chiarire cosa accomuna e cosa differenzia i risultati ottenuti nei punti (c) e (d).

Soluzione. (a) $\gamma \neq 0, \delta \neq \pm\sqrt{\gamma}$; (b) $\delta = 0 \wedge \gamma = \pm 1$;

(c) $\gamma < -\frac{1}{3} \wedge \gamma > \frac{1}{3}$; (d) $\gamma < -\frac{1}{9} \wedge \gamma > \frac{1}{9}$.

La condizione (c) è condizione sufficiente per la convergenza del metodo di Gauss-Seidel mentre la condizione (d) è necessaria e sufficiente.

3. Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola la funzione

$$f(x) = 2^{\log_2(x^2)} + x$$

nei punti di ascissa $0, \frac{1}{2}, 1$ e valutarlo nel punto di ascissa $x = 2$.

Soluzione. $p_2(x) = x^2 + x$. $p(2) = 6$.

4. Data l'equazione

$$\log(x) - \cos(x) = 0.$$

si determini l'intervallo $[k, k + 1]$, con k intero, che contiene la sua radice positiva e si indichi l'approssimazione che si ottiene applicando tre iterazioni del metodo di bisezione, partendo dall'intervallo determinato. Quale sarebbe stato l'ordine di convergenza del metodo di Newton?

Soluzione. $k = 1$; $\alpha \approx c_4 = \frac{21}{16} \approx 1,3125$.

Essendo $f'(\alpha) \neq 0$ Newton ha ordine di convergenza 2.

5. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -2 \\ -2 & -6 & -4 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix},$$

indicare lo spettro di A , il suo raggio spettrale e calcolare i numeri di condizionamento rispetto alle norme con indice 1 e ∞ .

Soluzione. $\sigma(A) = \{-12, -4, -2\}$, $\rho(A) = 12$, $k_1(A) = \frac{28}{3}$, $k_\infty(A) = 7$.