Nome, Cognome e matricola:...

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
19 Giugno 2018

1. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 2 & \gamma & 2 \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix},$$
stabilire per quali valori del parametro reale γ la matrice è invertibile e per quali risulta definita positiva. Considerato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [1, 2, 3]^T$, si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Jacobi e si calcoli la prima iterata partendo dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$. Senza svolgere nessun calcolo e motivando opportunamente la risposta, si dica se nel caso $\gamma = 5$ il metodo di Gauss-Seidel converge.

   Soluzione. La matrice è invertibile per $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, +2\}$ *e risulta definita positiva per* $\gamma > 2$. *Il metodo di Jacobi converge per* $\gamma < -2 \wedge \gamma > 2$. $\mathbf{x}^{(1)} = [0, \frac{2}{\gamma}, \frac{2}{\gamma}]^T$. *Per* $\gamma = 5$ *il metodo di Gauss-Seidel converge (Teorema 5.5).*

2. Dati
$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix},$$
si risolva il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ utilizzando il metodo computazionalmente più conveniente. Si giustifichi la scelta effettuata in termini di complessità computazionale.

   Soluzione. La matrice è triangolare inferiore quindi il metodo più conveniente è quello di sostituzione in avanti che ha complessità $O(\frac{n^2}{2})$. $\mathbf{x} = [1, 1, 1, 1]^T$.

3. Determinare, utilizzando il metodo grafico, l'intervallo $[k, k+1]$ che contiene la radice positiva dell'equazione
$$\sin(2x) - x^3 + 4 = 0.$$
Si indichi l'approssimazione della radice che si ottiene applicando tre iterazioni del metodo di Newton, partendo dall'estremo destro dell'intervallo determinato.

   Soluzione. La radice si trova nell'intervallo $[1, 2]$ *e* $x_3 = 1,5839$.

4. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix},$$
si calcolino i numeri di condizionamento in norma 1 e ∞, al variare del paramentro reale β.

Soluzione.

$$k_1(A) = \begin{cases} \frac{|\beta|+1}{2} & se \quad \beta < -3 \wedge \beta > 3 \\ \frac{3(|\beta|+1)}{2|\beta|} & se \quad -3 < \beta < -2 \wedge 2 < \beta < 3 \\ \frac{3}{|\beta|} & se \quad -2 < \beta < 2 \end{cases}$$

$$k_\infty(A) = \begin{cases} \frac{|\beta|+1}{2} & se \quad \beta < -3 \wedge \beta > 3 \\ \frac{3(|\beta|+1)}{2|\beta|} & se \quad -3 < \beta < -1 \wedge 1 < \beta < 3 \\ \frac{3}{|\beta|} & se \quad -1 < \beta < 1 \end{cases}$$

5. Dati i tre numeri

$$a = 17,723 \cdot 10^{-2} \qquad b = 371,843 \cdot 10^{-3} \qquad c = 2,39 \cdot 10^{-1},$$

si calcolino le quantità

$$t_1 = (b-a) \cdot c \qquad \text{e} \qquad t_2 = b \cdot c - a \cdot c$$

nell'insieme $\mathbb{F}(10, 4, -12, 12)$. Infine, si commentino i risultati ottenuti in termini di errore relativo giustificando quale scelta risulterebbe più conveniente effettuare.

Soluzione. $fl(t_1) = fl(t_2) = 0,465 \cdot 10^{-1}$, $\rho_1 = \rho_2 = 0,269 \cdot 10^{-3}$. *Le due scelte sono equivalenti.*

Nome, Cognome e matricola: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
19 Giugno 2018

1. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} \beta & 2 & 0 \\ 1 & \beta & 1 \\ 0 & 2 & \beta \end{bmatrix},$$
stabilire per quali valori del parametro reale β la matrice è invertibile e per quali risulta definita positiva. Considerato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [1, 2, 3]^T$, si studi al variare del parametro β la convergenza del metodo di Gauss-Seidel e si calcoli la prima iterata partendo dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$. Senza svolgere nessun calcolo e motivando opportunamente la risposta, si dica se nel caso $\gamma = 5$ il metodo di Jacobi converge.

   Soluzione. La matrice è invertibile per $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, +2\}$ *e risulta definita positiva per* $\beta > 2$. *Il metodo di Gauss-Seidel converge per* $\beta < -2 \wedge \beta > 2$. $\mathbf{x}^{(1)} = [-\frac{1}{\beta}, \frac{1+2\beta}{\beta^2}, \frac{-2-2\beta+3\beta^2}{\beta^3}]^T$. *Per* $\beta = 5$ *il metodo di Jacobi converge (Teorema 5.5).*
   Soluzione.

2. Dati
$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix},$$
si risolva il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ utilizzando il metodo computazionalmente più conveniente. Si giustifichi la scelta effettuata in termini di complessità computazionale.

   Soluzione. La matrice è triangolare inferiore quindi il metodo più conveniente è quello di sostituzione in avanti che ha complessità $O(\frac{n^2}{2})$. $\mathbf{x} = [-1, -\frac{5}{7}, \frac{19}{21}, \frac{9}{7}]^T$.

3. Determinare, utilizzando il metodo grafico, l'intervallo $[k, k+1]$ che contiene la radice positiva dell'equazione
$$\cos(2x) - x^3 + 4 = 0.$$
Si indichi l'approssimazione della radice che si ottiene applicando tre iterazioni del metodo di Newton, partendo dall'estremo destro dell'intervallo determinato.

   Soluzione. La radice si trova nell'intervallo $[1, 2]$ *e* $x_3 = 1,4471$.

4. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix},$$

si calcolino i numeri di condizionamento in norma 1 e ∞, al variare del paramentro reale γ.

Soluzione.

$$k_1(A) = \begin{cases} \frac{|\gamma|+1}{2} & se \quad \gamma < -3 \wedge \gamma > 3 \\ \frac{3(|\gamma|+1)}{2|\gamma|} & se \quad -3 < \gamma < -1 \wedge 1 < \gamma < 3 \\ \frac{3}{|\gamma|} & se \quad -1 < \gamma < 1 \end{cases}$$

$$k_\infty(A) = \begin{cases} \frac{|\gamma|+1}{2} & se \quad \gamma < -3 \wedge \gamma > 3 \\ \frac{3(|\gamma|+1)}{2|\beta|} & se \quad -3 < \gamma < -2 \wedge 2 < \gamma < 3 \\ \frac{3}{|\gamma|} & se \quad -2 < \gamma < 2 \end{cases}$$

5. Dati i tre numeri

$$a = 177,23 \cdot 10^{-3} \qquad b = 3,71843 \cdot 10^{-1} \qquad c = 23,9 \cdot 10^{-2},$$

si calcolino le quantità

$$t_1 = (b+a) \cdot c \qquad \text{e} \qquad t_2 = b \cdot c + a \cdot c$$

nell'insieme $\mathbb{F}(10, 4, -12, 12)$. Infine, si commentino i risultati ottenuti in termini di errore relativo giustificando quale scelta risulterebbe più conveniente effettuare.

Soluzione. $fl(t_1) = 0,1312 \cdot 10^0$, $fl(t_2) = 0,1313 \cdot 10^0$, $\rho_1 = 0,22 \cdot 10^{-3}$, $\rho_2 = 0,545 \cdot 10^{-3}$. *Il calcolo di* t_1 *risulta più conveniente.*