

Nome, Cognome e matricola:

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

23 Marzo 2018

1. Si utilizzi la fattorizzazione $A = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (6, 10, 12, 12)^T$. Motivando opportunamente la risposta, indicare quale metodo sarebbe stato più conveniente utilizzare dal punto di vista computazionale e utilizzarlo per calcolare l'inversa della matrice A .

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile e per quali valori il metodo di Gauß-Seidel risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Posto $\alpha = -1$ si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Gauß-Seidel utilizzando il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

3. Si calcolino i numeri di condizionamento rispetto alle norme con indice 1, 2 e ∞ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Determinare l'intervallo $[k, k + 1]$, con k intero, che contiene la radice positiva dell'equazione

$$\cos(2x) - \frac{1}{2}x^2 + 4 = 0.$$

Si indichi l'approssimazione che si ottiene applicando tre iterazioni del metodo di bisezione, partendo dall'intervallo determinato. Si indichi inoltre l'approssimazione della radice che si ottiene applicando due iterazioni del metodo di Newton, partendo dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Qual è l'ordine di convergenza dei metodi utilizzati?

5. Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola la funzione

$$f(x) = \cos x - \sin x$$

nei punti di ascissa $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ e valutarlo nel punto di ascissa $x = 1$.