

Nome, Cognome e matricola: .....

**Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici**

15 Febbraio 2018

1. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

dipendente dal parametro reale  $\alpha > 0$ . Stabilire per quali valori del parametro i metodi di Jacobi e di Gauß-Seidel applicati al sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ , convergono. Per i valori di  $\alpha$  che rendono convergenti entrambi i metodi, stabilire quale dei due converge più velocemente.

2. Si costruisca la matrice  $A = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ , dove  $I$  è la matrice identità di dimensione 4 e  $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^T$ . Si dimostri che  $A$  è l'inversa di se stessa e si calcolino i numeri di condizionamento rispetto alle norme con indice 1, 2 e  $\infty$ .
3. Determinare l'intervallo  $[k, k + 1]$  che contiene la radice positiva dell'equazione

$$\frac{1}{2x} - 2x + 2 = 0.$$

Si indichi l'approssimazione che si ottiene applicando due iterazioni del metodo di bisezione, partendo dall'intervallo determinato. Si indichi inoltre l'approssimazione della radice che si ottiene applicando due iterazioni del metodo di Newton, partendo dall'estremo destro dell'intervallo determinato.

4. Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{2}x_3 - 3x_4 = \frac{3}{4} \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \frac{7}{2} \\ -\frac{4}{3}x_1 - \frac{11}{6}x_2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{19}{6}x_4 = -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{7}{4}x_3 - x_4 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & -\frac{7}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 7 \end{array}$$

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa  $x = -2$ .

Nome, Cognome e matricola: .....

**Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici**

15 Febbraio 2018

1. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

dipendente dal parametro reale  $\alpha > 0$ . Stabilire per quali valori del parametro i metodi di Jacobi e di Gauß-Seidel applicati al sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ , convergono. Per i valori di  $\alpha$  che rendono convergenti entrambi i metodi, stabilire quale dei due converge più velocemente.

2. Si costruisca la matrice  $A = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ , dove  $I$  è la matrice identità di dimensione 4 e  $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^T$ . Si dimostri che  $A$  è l'inversa di se stessa e si calcolino i numeri di condizionamento rispetto alle norme con indice 1, 2 e  $\infty$ .
3. Determinare l'intervallo  $[k, k + 1]$  che contiene la radice positiva dell'equazione

$$\frac{1}{3x} - 3x + 3 = 0.$$

Si indichi l'approssimazione che si ottiene applicando due iterazioni del metodo di bisezione, partendo dall'intervallo determinato. Si indichi inoltre l'approssimazione della radice che si ottiene applicando due iterazioni del metodo di Newton, partendo dall'estremo destro dell'intervallo determinato.

4. Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{6}x_2 + \frac{7}{3}x_3 - 4x_4 = -\frac{5}{6} \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + 4x_4 = \frac{11}{3} \\ 3x_1 - \frac{9}{4}x_2 + 3x_3 - 2x_4 = \frac{7}{4} \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

$x_i$	-1	0	1	2
$y_i$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa  $x = -2$ .