

Nome, Cognome e matricola:

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

31 Gennaio 2018

Compito numero 231234

1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 = 3 \\ ax_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro la matrice dei coefficienti del sistema è non singolare, per quali è definita positiva e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema converge. Posto $a = \frac{1}{2}$, si calcoli la prima iterata del metodo di Gauß-Seidel, a partire da un vettore $\mathbf{x}^{(0)}$ non nullo. Senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta si dica se nel caso $a = \frac{1}{2}$ il metodo di Gauß-Seidel converge.

2. Assegnate le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix},$$

si calcoli il determinante di A e si dica se è invertibile. Si calcoli il prodotto LL^T e si determinino i valori dei parametri a , b e c che rendono M l'inversa di L . Sfruttando i calcoli fatti si deduca l'inversa di A . Assegnati ai parametri a e b i valori trovati, si calcolino le norme 1 e ∞ della matrice M al variare di c . Infine, si calcoli il numero di condizionamento in norma 2 della matrice L .

3. Determinare l'intervallo $[k, k + 1]$ che contiene la radice positiva dell'equazione

$$9x^4 - 6x^2 + 1 = 0.$$

Si indichi l'approssimazione della radice che si ottiene applicando due iterazioni del metodo di Newton, partendo dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Motivando opportunamente la risposta, dire qual è l'ordine di convergenza del metodo di Newton.

4. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = -9 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -8 \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-1	0	1	2
y_i	7	1	-1	-17

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = -2$.

6. Dati i tre numeri $a = 23,155 \cdot 10^{-2}$, $b = 0,181815$ e $c = 0,253982 \cdot 10^{-1}$, si calcolino le quantità $r_1 = (a \cdot c) \cdot b$ e $r_2 = a \cdot (c \cdot b)$ in un sistema in virgola mobile in base 10 con un numero di cifre significative pari a 5. Commentare i risultati ottenuti.

Nome, Cognome e matricola:

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

31 Gennaio 2018

Compito numero 675432

1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 = 3 \\ ax_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro la matrice dei coefficienti del sistema è non singolare, per quali è definita positiva e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema converge. Posto $a = \frac{1}{2}$, si calcoli la prima iterata del metodo di Gauß-Seidel, a partire da un vettore $\mathbf{x}^{(0)}$ non nullo. Senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta si dica se nel caso $a = \frac{1}{2}$ il metodo di Gauß-Seidel converge.

2. Assegnate le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & r & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si calcoli il determinante di A e si dica se è invertibile. Si calcoli il prodotto $R^T R$ e si determinino i valori dei parametri r , s e t che rendono S l'inversa di R . Sfruttando i calcoli fatti si deduca l'inversa di A . Assegnati ai parametri s e t i valori trovati, si calcolino le norme 1 e ∞ della matrice S al variare di r . Infine, si calcoli il numero di condizionamento in norma 2 della matrice R .

3. Determinare l'intervallo $[k, k + 1]$ che contiene la radice positiva dell'equazione

$$16x^4 - 24x^2 + 9 = 0.$$

Si indichi l'approssimazione della radice che si ottiene applicando due iterazioni del metodo di Newton, partendo dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Motivando opportunamente la risposta, dire qual è l'ordine di convergenza del metodo di Newton.

4. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 \\ x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{3}{2} \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & -7 & -1 & 1 & 17 \end{array}$$

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = -2$.

6. Dati i tre numeri $a = 0,23155$, $b = 18,1815 \cdot 10^{-2}$ e $c = 0,253982 \cdot 10^{-1}$, si calcolino le quantità $r_1 = (a \cdot c) \cdot b$ e $r_2 = a \cdot (c \cdot b)$ in un sistema in virgola mobile in base 10 con un numero di cifre significative pari a 5. Commentare i risultati ottenuti.