

Nome, Cognome e matricola:

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

16 Gennaio 2018

Compito numero $-e^{i\pi}$

1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 3\beta x_3 = -4 \\ 3x_2 = 3 \\ \beta x_1 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

dove β è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali il metodo di Jacobi converge. Posto $\beta = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauß-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$. Senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta si dica se nel caso $\beta = 1$ il metodo di Gauß-Seidel converge.

2. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono A e B l'una l'inversa dell'altra e verificare che C sia una matrice ortogonale. Assegnati ai parametri i valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle tre matrici in norma 1, 2 e ∞ . Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

3. Determinare l'intervallo $[k, k + 1]$ che contenga la radice positiva dell'equazione

$$\cos(4x) - 2x - \frac{1}{4} = 0.$$

Calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterazioni del metodo di Newton, a partire dall'estremo sinistro dell'intervallo determinato. Dire qual è l'ordine di convergenza del metodo di bisezione.

4. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare la terza colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-2	-1	1	2
y_i	2	1	3	1

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = 3$.

Nome, Cognome e matricola:

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

16 Gennaio 2018

Compito numero $\cos(0) + \sin(\frac{\pi}{2})$

1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 8x_1 + 6\alpha x_3 = -8 \\ 6x_2 = 6 \\ 2\alpha x_1 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali il metodo di Gauß-Seidel converge. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$. Senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta si dica se nel caso $\alpha = 2$ il metodo di Jacobi converge.

2. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono A e B l'una l'inversa dell'altra e verificare che C sia una matrice ortogonale. Assegnati ai parametri i valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle tre matrici in norma 1, 2 e ∞ . Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

3. Determinare l'intervallo $[k, k + 1]$ che contenga la radice positiva dell'equazione

$$\sin(4x) + 2x - 1 = 0.$$

Calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterazioni del metodo di Newton, a partire dall'estremo sinistro dell'intervallo determinato. Dire qual è l'ordine di convergenza del metodo di bisezione.

4. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = -3 \\ 4x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare la seconda colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-2	-1	1	2
y_i	1	3	1	2

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = 3$.