

Esame per il Corso di MATEMATICA 2
Università di Studi di Cagliari, 2018/2019
Corso di Laurea in Chimica

19 Settembre 2019

Durata: 3 ore

Attenzione: Per ottenere il punteggio massimo in ogni domanda, la risposta deve essere dettagliatamente giustificata. Giustificazioni parziali potranno essere considerate per punteggi parziali. Risposte senza giustificazioni non verranno considerate. Le soluzioni ammissibili sono esclusivamente quelle nella bella. In ogni caso bisogna consegnare anche la brutta copia.

1. Sia k un numero reale e si considerino il seguente sistema di tre equazioni lineari in tre variabili x, y e z :

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x \quad \quad + 2z = -1 \\ -x + ky - z = 1. \end{cases}$$

- (a) (1 punto) Sia A la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni. Si calcoli il determinante di A (come funzione dipendente di k).
- (b) (1 punto) Si usi il teorema di Rouché-Capelli per determinare per quali valori di k il sistema di equazioni non ha soluzioni.
- (c) (2 punti) Si usi il teorema di Cramer per calcolare la soluzione del sistema quando $k = -1$.
2. Si calcolino:
- (a) (3 punti) il limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}{x^2 - 2x + 1}$
- (b) (3 punti) l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \sin(\ln(x))$ nel punto $x = 1$.
3. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}$ dall'espressione $f(x) = xe^{-2x}$.
- (a) (3 punti) Si trovino gli zeri, gli asintoti e il segno della funzione f in tutto il suo dominio.
- (b) (5 punti) Si trovino gli intervalli dove f è crescente o decrescente e i punti massimi e minimi (relativi) della funzione in $\mathbb{R}$. Per ogni massimo o minimo trovato, si indichi se sono massimi o minimi assoluti.
- (c) (2 punti) Si trovino gli intervalli dove f è concava e dove f è convessa in $\mathbb{R}$.
- (d) (1 punto) Si tracci il grafico di f .
- (e) (3 punti) L'integrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ è convergente o divergente? In caso sia convergente, si calcoli il suo valore.
4. (4 punti) Si calcoli l'area della regione delimitata dai grafici di $g(x) = x^2 - 5x + 4$ e $h(x) = x + 4$.
5. Siano f e g due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in ogni punto di $]a, b[$. Supponiamo che $f(a) = f(b)$ e che $g(a) = g(b)$, e sia h la funzione definita in $[a, b]$ come $h(x) = f(x) - g(x)$.
- (a) (1 punto) Si dimostri che la funzione h ammette almeno un punto stazionario $x = c$ nell'intervallo $]a, b[$.
- (b) (1 punto) Si dimostri che per qualsiasi punto stazionario $x = c$ di h , la retta tangente al grafico di f nel punto c è parallela alla retta tangente al grafico di g nel punto c .

Esame di Matematica 2

Corso di laurea in Chimica

19/09/2019

① $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x + 2z = -1 \\ -x + ky - z = 1 \end{cases}$$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & k & -1 \end{pmatrix}$ $\det A = (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ k & -1 \end{pmatrix}$

↑
Sviluppo lungo la seconda riga

$$+ (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$$

$$= -3(1 - (-k)) + (-2) \cdot (k - 1)$$

$$= -3 - 3k - 2k + 2 = -5k - 1$$

b) Si consideri la matrice

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & k & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Il teorema di Rouché-Capelli dice che il

sistema di equazioni ha soluzioni se e solo se $\text{rk } A = \text{rk } \tilde{A}$. Quindi il sistema non ha soluzioni se e solo se $\text{rk } A \neq \text{rk } \tilde{A}$. Calcoliamo il rango di A e il rango di $\tilde{A}$.

$$\text{rk } A = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -\frac{1}{5} \quad \left(\begin{array}{l} \text{in questo caso,} \\ \det(A) \neq 0 \text{ e} \\ \text{quindi il rango \textit{è} } \\ \text{massimale} \end{array} \right) \\ 2 & \text{se } k = -\frac{1}{5} \quad \left(\begin{array}{l} \text{in questo caso} \\ \det(A) = 0, \text{ ma} \\ \text{esiste una sottomatrice} \\ \text{di ordine 2 con determinante} \\ \text{diverso da 0: esempio } \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \end{array} \right) \end{cases}$$

Invece si osservi che $\text{rk}(\tilde{A}) = 3$ qualsiasi sia il valore di k . Infatti, la sottomatrice 3×3 ottenuta togliendo la seconda colonna di $\tilde{A}$ ha per determinanti:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{sviluppo di Laplace} \\ \text{lungo prima riga}}}{=} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (2-1) + (3-1) + 2 \cdot (-3+2) = 1 + 2 - 2 = 1.$$

Quindi $\text{rk}(A) \neq \text{rk}(\tilde{A}) \Leftrightarrow \text{rk}(A) \neq 3 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}$.

e) Per il teorema di Cramer, siccome per $k = -1$ il determinante di A è $(-5)(-1) - 1 = 4 \neq 0$, il sistema ha un'unica soluzione:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} \underset{\substack{\text{sviluppo lungo seconda colonna}}}{=} \frac{(-1)(-1)(1-2) + (-1)(-1)(4-1)}{4}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} \underset{\substack{\text{sviluppo lungo prima riga}}}{=} \frac{(1-2) - 2 \cdot (-3+2) - 1(3-1)}{4}$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} \underset{\substack{\text{sviluppo lungo seconda colonna}}}{=} \frac{(-1)(-1)(3-1) + (-1)(-1)(-1-6)}{4}$$

Cioè, $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = -\frac{5}{4}$

(2) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}{x^2 - 2x + 1} = ?$

Sia $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$. Chiaramente, $f(1) = 0$ e,
 Quindi $x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ è divisibile per $x - 1$.

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 9x + 5 \quad | x-1 \\ -x^3 + x^2 \\ \hline 4x^2 - 9x + 5 \\ -4x^2 + 4x \\ \hline -5x + 5 \\ +5x - 5 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x-1)^0 (x^2 + 4x - 5).$$

Si osservi che il denominatore si può scrivere

Come $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Quindi
$$\frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x^2 + 4x - 5)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x - 5}{x-1} \quad x \neq 1$$

Comunque, abbiamo ancora che $g(x) = x^2 + 4x - 5$ ha la proprietà che $g(1) = 0$. Quindi, scriviamo $(x-1)h(x) = x^2 + 4x - 5$. Siccome $x^2 + 4x - 5 = 0$

abbiamo che $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5) \Leftrightarrow x=1 \vee x=-5$

Quindi,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x+5) = 6$$

↳ $x+5$ è continua nel punto $x=1$.

b) $f(x) = \sin(\ln(x))$ Per la regola della catena,
 $f'(x) = \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}$

Siccome l'equazione della retta tangente al grafico di f in un punto $x = c$ è

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

abbiamo che nel punto $x = 1$ la retta tangente è

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

Siccome $f(1) = \sin(\ln(1)) = \sin 0 = 0$

e $f'(1) = \cos(\ln(1)) = \cos 0 = 1$

abbiamo che la retta tangente è

$$y = 0 + 1(x - 1), \text{ cioè } \boxed{y = x - 1}$$

③ $f(x) = x e^{-2x} = \frac{x}{e^{2x}}$ dominio: $\mathbb{R}$

a) zeri $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 $\hookrightarrow e^{-2x}$ non si annulla mai

Segno $e^{-2x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, e quindi

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Asintoti: dominio $\mathbb{R} \Rightarrow$ non ci sono asintoti verticali
 e f continua in tutto il suo dominio

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}}$ usiamo la regola di de l'Hôpital.

Si osserva che siccome x e e^{2x} sono derivabili in $\mathbb{R}$ e le sue derivate non si annullano mai,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0.$$

Quindi $y=0$ è un asintoto orizzontale (per $x \rightarrow +\infty$)

$$\text{Invece } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-2x} = -\infty$$

per il teorema delle operazioni sui limiti

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \right).$$

Manca solo verificare se c'è un asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$ (il limite calcolato sopra dimostra che non c'è un asintoto orizzontale)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{2x}} = +\infty.$$

Quindi non c'è un asintoto obliquo.

$$b) f'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot (-2) \cdot e^{-2x}$$

↓
regola di
Leibniz + regola della
catena

$$= e^{-2x} (1 - 2x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \leadsto f \text{ è crescente in }]-\infty, \frac{1}{2}[$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \leadsto f \text{ è decrescente in }]\frac{1}{2}, +\infty[$$

Quindi $x = \frac{1}{2}$ è un massimo. In più, è un massimo assoluto una volta che f cresce sempre fino a $x = \frac{1}{2}$ e decresce sempre dopo.

$$c) f''(x) = (-2)e^{-2x}(1-2x) + e^{-2x}(-2)$$

↓
regola di
Leibnitz + regola della
catena

$$= -2e^{-2x}(1-2x+1)$$

$$= -2e^{-2x}(2-2x)$$

$$f''(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 2-2x = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = 1$$

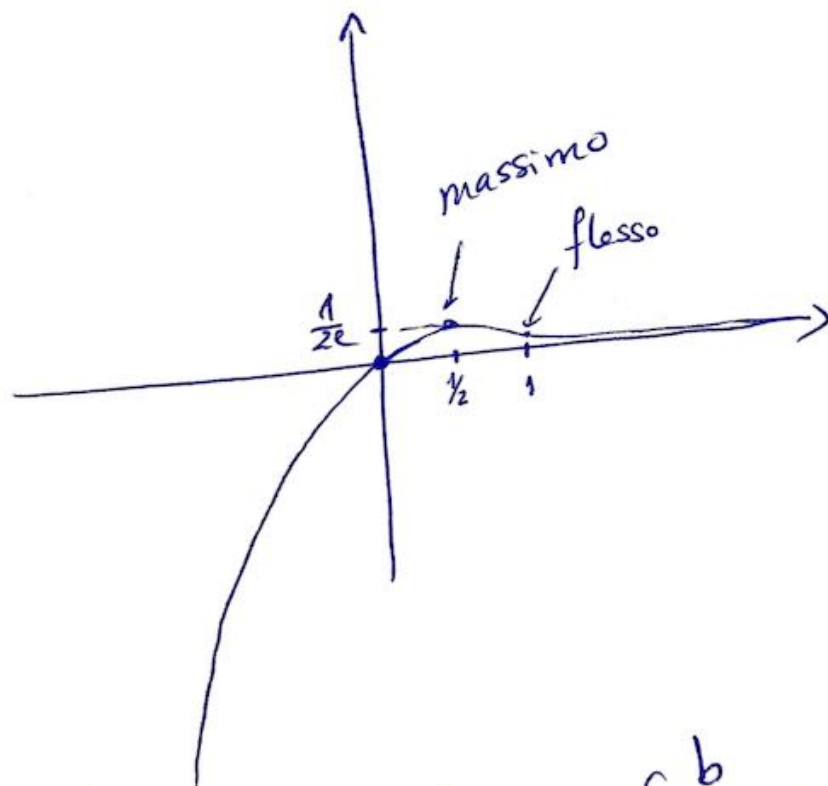
$$f''(x) > 0 \quad (\Rightarrow) \quad 2-2x < 0 \quad (\Rightarrow) \quad x > 1 \leadsto f \text{ is convex in }]1, +\infty[$$

$$e^{-2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) > 0 \quad (\Rightarrow) \quad 2-2x > 0 \quad (\Rightarrow) \quad x < 1 \leadsto f \text{ is concave in }]-\infty, 1[$$

Quindi $x = 1$ è un flesso.

d)



$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-1} = \frac{1}{2e}$$

$$e) \int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x e^{-2x} dx$$



$$\int \underbrace{x}_f \underbrace{e^{-2x}}_{g'} dx = x \frac{e^{-2x}}{-2} - \int 1 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} dx$$

integrazione
per parti

$$= x \frac{e^{-2x}}{-2} - \frac{e^{-2x}}{-2} + C$$

$$= e^{-2x} \left(-\frac{1}{4} - \frac{x}{2} \right) + C$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[e^{-2x} \left(-\frac{1}{4} - \frac{x}{2} \right) \right]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-2b} \left(-\frac{1}{4} - \frac{b}{2} \right) - \left(1 \cdot \left(-\frac{1}{4} - 0 \right) \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-2b} \left(-\frac{1}{4} - \frac{b}{2} \right) + \frac{1}{4} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2b}}{4} - \frac{e^{-2b} \cdot b}{2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Adesso si osservi che $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2b}}{4} = 0$

e $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-2b} \cdot b = 0$ (vedere ③ a))

Per il teorema delle operazioni sui limiti abbiamo

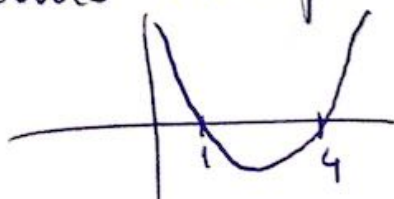
che $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{4}$ e quindi converge.

④ $g(x) = x^2 - 5x + 4$ $h(x) = x + 4$

$g(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = 4$

$g''(x) = 1 > 0$ quindi abbiamo una parabola
Convessa

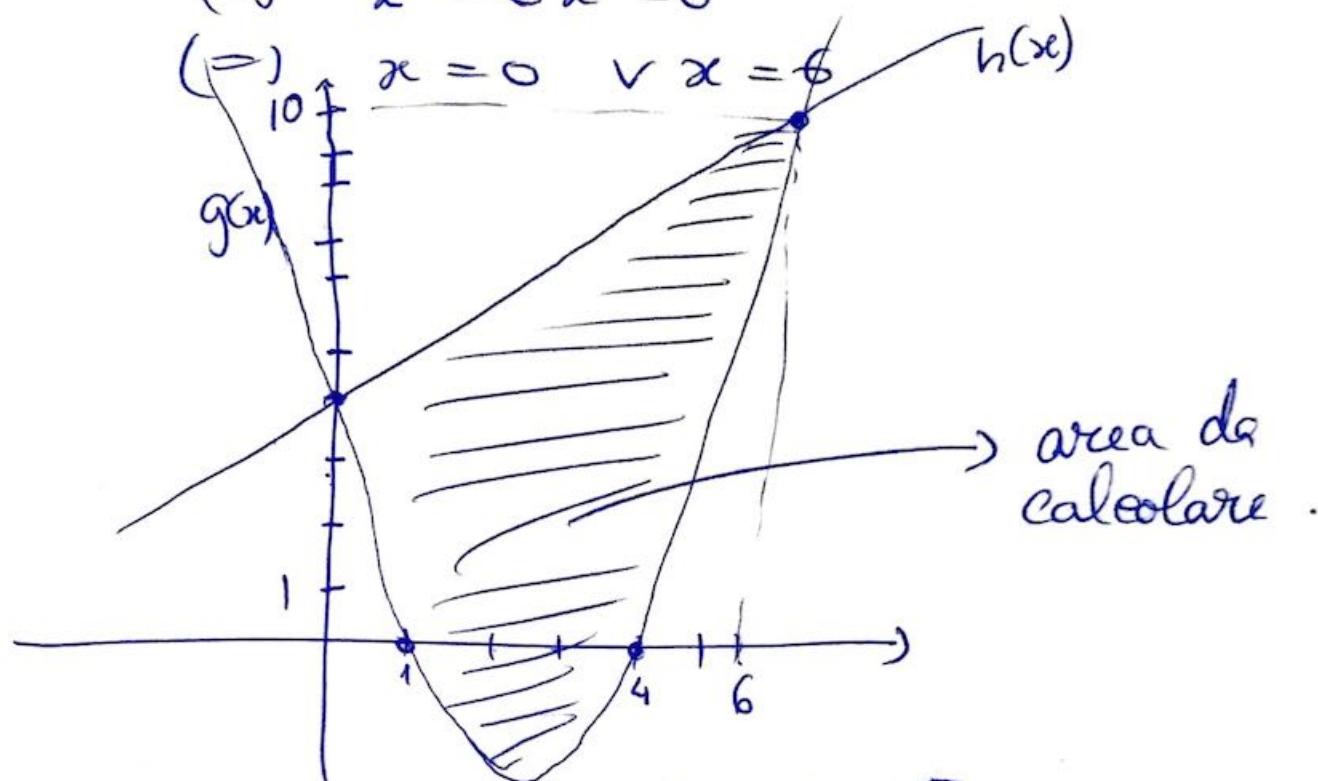
Come grafico di g



$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$



Si osservi che nell'intervallo $]0, 6[$

$$h(x) - g(x) = x + 4 - x^2 + 5x - 4 =$$

$$= 6x - x^2 > 0 \quad \forall x \in]1, 6[.$$

Quindi l'area viene calcolata come

$$\int_0^6 x + 4 - x^2 + 5x - 4 \, dx =$$

$$= \int_0^6 6x - x^2 \, dx =$$

$$= \left[6 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^6 = 6 \cdot \frac{36}{2} - \frac{6^3}{3}$$

$$= \frac{6^3}{2} - \frac{6^3}{3} = \frac{3 \cdot 6^3}{6} - \frac{26^3}{6}$$

$$= \frac{6^3}{6} = 6^2 = 36.$$

⑤ a) Sia $h(x) = f(x) - g(x)$.

- $h(x)$ è continua in $[a, b]$ perchè f e g sono continue in $[a, b]$

- $h(x)$ è derivabile in $]a, b[$ perchè f e g sono derivabili in $]a, b[$

- $h(a) = f(a) - g(a) = f(b) - g(b) = h(b)$

~~Quindi~~ Quindi, per il teorema di Rolle, esiste $c \in]a, b[$ tale che $h'(c) = 0$

b) Allora, $h'(c) = f'(c) - g'(c) = 0$

Quindi $f'(c) = g'(c)$. Siccome $f'(c)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $x = c$ e $g'(c)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di g nel punto $x = c$, le rette sono parallele.