

Esame per il Corso di MATEMATICA 2
Università di Studi di Cagliari, 2018/2019
Corso di Laurea in Chimica

29 Luglio 2019

Durata: 3 ore

Attenzione: Per ottenere il punteggio massimo in ogni domanda, la risposta deve essere dettagliatamente giustificata. Giustificazioni parziali potranno essere considerate per punteggi parziali. Risposte senza giustificazioni non verranno considerate. Le soluzioni ammissibili sono esclusivamente quelle nella bella. In ogni caso bisogna consegnare anche la brutta copia.

1. Siano v e w due vettori in $\mathbb{R}^3$ tali che $v \cdot w = 3$, $\|v\| = 2$, $\|w\| = \sqrt{3}$ e tali che l'angolo θ fra v e w si trova nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sia z la proiezione ortogonale di v in w .
 - (a) **(1 punto)** Si calcoli lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $z = \lambda w$.
 - (b) **(1 punto)** Si calcoli l'angolo θ .
 - (c) **(2 punti)** Si calcoli l'area del parallelogramma definito da v e w .
2. Si calcolino:
 - (a) **(3 punti)** il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sin(x)}{4x - \sin(x)}$.
 - (b) **(3 punti)** l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \ln(x^2 - 3)$ nel punto $x = 2$.
3. Si consideri la funzione definita in $[0, +\infty[$ dall'espressione $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$.
 - (a) **(3 punti)** Si trovino gli zeri, gli asintoti e il segno della funzione f in tutto il suo dominio.
 - (b) **(5 punti)** Si trovino gli intervalli dove f è crescente o decrescente e i punti massimi e minimi (relativi) della funzione in $]0, +\infty[$. Per ogni massimo o minimo trovato, si indichi se sono massimi o minimi assoluti. In particolare, la funzione f ammette un minimo assoluto nel suo dominio?
 - (c) **(2 punti)** Si trovino gli intervalli dove f è concava e dove f è convessa in $]0, +\infty[$.
 - (d) **(1 punto)** Si tracci il grafico di f .
 - (e) **(3 punti)** Si calcoli l'integrale indefinito di f .
4. **(4 punti)** Attraverso l'uso del calcolo integrale, si calcoli l'area del quadrilatero determinato dalle rette $y = x + 1$, $y = 3 - x$, $x = 0$ e $y = 0$.
5. **(2 punti)** Sia f una funzione di dominio $[a, b]$, continua in $[a, b]$ e derivabile in ogni punto di $]a, b[$. Sia g la funzione (continua in $[a, b]$) definita da

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Supponiamo che f sia strettamente crescente in $[a, c[$ e strettamente decrescente in $]c, b]$. Si dimostri che $x = c$ è un flesso di g .

Esame di Matematica 2
Corso di laurea in Chimica
29/07/2019

① $v \cdot w = 3$
 $\|v\| = 2$
 $\|w\| = \sqrt{3}$

$0 \leq \theta \leq \pi/2$ angolo fra v e w

a) La proiezione ortogonale di v su w è
calcolata così: $p_w(v) = \underbrace{(\|v\| \cos \theta)}_{\text{scalare } \lambda} w$

Siccome $v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos \theta$

allora $\frac{v \cdot w}{\|w\|} = \|v\| \cos \theta = \lambda$

Quindi, $\lambda = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

b) Per la stessa formula, $\cos \theta = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Siccome $0 \leq \theta \leq \pi/2$, allora $\theta = \pi/6$.

c) L'area del parallelogramma definito da v e w
è $\|v \times w\| = \|v\| \|w\| \sin \theta = 2 \cdot \sqrt{3} \sin \pi/6 =$
 $= 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$

$$\textcircled{2} \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sin(x)}{4x - \sin(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{\sin(x)}{x}}{4 - \frac{\sin(x)}{x}} = \textcircled{*}$$

Siccome $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ ($|\sin(x)| \leq 1$ e,

Criterio del confronto $\left\{ \begin{array}{l} \text{quindi, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \end{array} \right.$

allora per il teorema delle operazioni sui limiti, abbiamo che

$$\textcircled{*} = \frac{3}{4}$$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 3)$

retta tangente al grafico di f nel punto $x = 2$:

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 3} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 - 3}$$

regola della catena

$$f'(2) = \frac{4}{4 - 3} = 4$$

$$\boxed{f(2) = \ln 1 = 0}$$

Quindi la retta tangente è $y = 4(x - 2) = 4x - 8$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \quad x \in]0, +\infty[$$

a) Zeri:

$$f(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 2\sqrt{x} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = 0.$$

$$\text{Asintoti:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}} \quad \downarrow \quad 0$$

Si come $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$
 e $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$,
 per il teorema delle operazioni sui
 limiti abbiamo che...

Quindi $y=0$ è un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.
 In particolare, f non ha asintoti obliqui per $x \rightarrow +\infty$.
 La funzione non è definita per $x \rightarrow -\infty$ e in $x=0$,
 $f(0)=0$. Quindi f non ha asintoti ~~non~~ verticali.

Segno: per $x > 0$, $2\sqrt{x} > 0$ e $x+1 > 0$.

Quindi $f(x) > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$.
 (e $f(0) = 0$).

$$\text{b) } f'(x) = \frac{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivata del} \\ \text{quoziente}}}{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (x+1)} - 1 \cdot (2\sqrt{x})}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1-2x}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2}$$

Punti stazionari $f'(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 1-x = 0 \wedge \sqrt{x}(x+1)^2 \neq 0$

$(\Leftrightarrow) \quad x=1 \wedge x \neq 0, -1$
 Quindi $x=1$ è l'unico punto stazionario di f .

Segno della derivata: $\sqrt{x}(x+1)^2 > 0$ per $x > 0$

$$f'(x) < 0 \quad (\Rightarrow) \quad 1 - x < 0$$

$$(\Rightarrow) \quad x > 1$$

$$f'(x) > 0 \quad (\Rightarrow) \quad 1 - x > 0 \quad (\Rightarrow) \quad x < 1$$

Quindi, f è crescente nell'intervallo $]0, 1[$ e
decrescente nell'intervallo $]1, +\infty[$.

In particolare $x = 1$ è un massimo relativo di f .
In più, siccome questo massimo è unico e positivo,
tenendo in conto che la funzione è crescente
fino a $x = 1$ e decrescente dopo, possiamo anche
dire che $x = 1$ è un massimo assoluto di f .

In più, nonostante il fatto che f non è derivabile
in $x = 0$, siccome $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$ e $f(0) = 0$,
abbiamo che $x = 0$ è un minimo assoluto
per f nel suo dominio.

$$\begin{aligned} c) \quad f''(x) &= \frac{(-1) \cdot \sqrt{x}(x+1)^2 - (1-x) \cdot \left(\frac{(x+1)^2}{2\sqrt{x}} + 2(x+1)\sqrt{x} \right)}{x(x+1)^4} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{derivata} \\ &\quad \text{del quoziente} \\ &\quad + \text{regola di Leibnitz} \\ &= \frac{-\sqrt{x}(x+1)^2 - (1-x) \cdot \left(\frac{(x+1)^2 + 4(x+1) \cdot x}{2\sqrt{x}} \right)}{x(x+1)^4} \\ &= \frac{-2x(x+1)^2 - (1-x)(x+1)^2 - 4x(1-x)(1+x)}{2\sqrt{x} \cdot x(x+1)^4} \\ &= \frac{-2x(x+1) - (1-x)(1+x) - 4x(1-x)}{2\sqrt{x} \cdot x(x+1)^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x - 1 + x^2 - 4x + 4x^2}{2\sqrt{x} \cdot x \cdot (x+1)^3}$$

$$= \frac{3x^2 - 6x - 1}{2\sqrt{x} \cdot x \cdot (x+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 3x^2 - 6x - 1 = 0 \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} x > 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{pmatrix}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad x = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Si osservi che $3 < 4$ e quindi $\sqrt{3} < 2$

In particolare $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ e quindi $1 - \frac{2}{\sqrt{3}} < 0$, cioè, non appartiene al dominio di f'' .

Quindi la seconda derivata si annulla solo in $x = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$

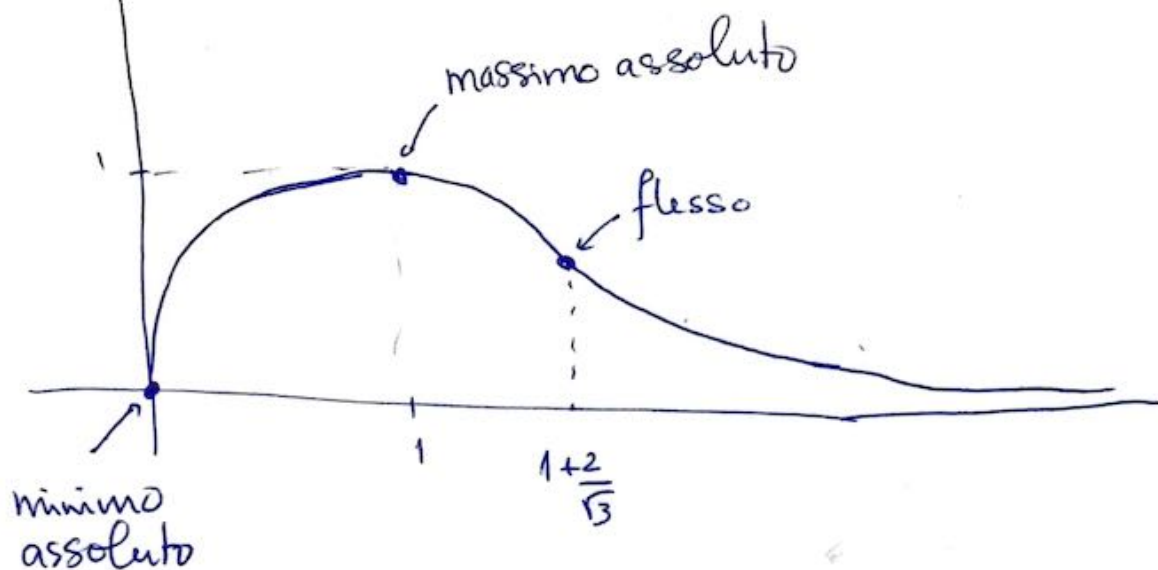
Segno della seconda derivata:

x	0		$1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$	
$3x^2 - 6x - 1$	-1	-	0	+
$2\sqrt{x} \cdot x \cdot (x+1)^3$	0	+	...	+
$f''(x)$	non definita	-		+

Quindi f è concava nell'intervallo $]0, 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}[$ e
 Convessa nell'intervallo $]1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty[$.

flesso

d)



$$e) \int \frac{2\sqrt{x}}{x+1} dx$$

Usiamo integrazione per sostituzione

$$y = \sqrt{x}$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{2\sqrt{x}}{x+1} dx = \int \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \cdot 2\sqrt{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{dy} dx$$

$$= \int \frac{2y \cdot 2y}{y^2+1} dy = \int \frac{4y^2}{y^2+1} dy$$

divisione di
polinomi :

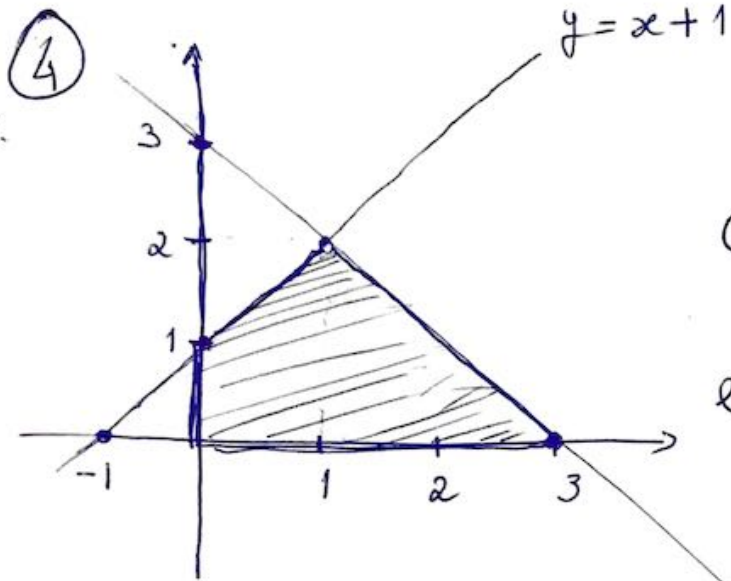
$$\begin{array}{r} 4y^2 \quad | \quad y^2+1 \\ -4y^2-4 \quad | \quad 4 \\ \hline -4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{4y^2}{y^2+1} = 4 - \frac{4}{y^2+1}$$

Quindi $\int \frac{4y^2}{y^2+1} dy = \int 4 - \frac{4}{y^2+1} dy =$

$$= 4y - 4 \arctan(y) + C$$

$$= 4\sqrt{x} - 4 \arctan(\sqrt{x}) + C$$



$$x+1 = 3-x$$

$$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Chiaramente, per $x \in [0, 1]$

$$0 \leq x+1 \leq 3-x$$

e per $x \in [1, 3]$

$$0 \leq 3-x \leq x+1$$

Quindi,

$$\text{Area} = \int_0^1 x+1 \, dx + \int_1^3 3-x \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2} + 1 - 0 + 9 - \frac{9}{2} - \left(3 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{9}{2} - \frac{5}{2}$$

$$= \frac{7}{2}$$

⑤

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

f continua in $[a, b]$
 f derivabile in $]a, b[$

Per il teorema fondamentale del calcolo,

$$g'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in]a, b[.$$

Quindi, siccome f è derivabile in $]a, b[$,

$$g''(x) = f'(x).$$

Allora f strettamente crescente $\Rightarrow f'(x) > 0$
in $]a, c[$ in $]a, c[$

f strettamente decrescente $\Rightarrow f'(x) < 0$
in $]c, b[$ in $]c, b[$

Quindi, $g''(x) > 0 \quad \forall x \in]a, c[\leadsto g$ convessa
in $]a, c[$

e $g''(x) < 0 \quad \forall x \in]c, b[\leadsto g$ concava
in $]c, b[$

Siccome g cambia di convessa a concava
nel punto $x = c$, allora $x = c$ è un flesso
di g .