

Esame per il Corso di MATEMATICA 2
Università di Studi di Cagliari, 2018/2019
Corso di Laurea in Chimica

9 Luglio 2019

Durata: 3 ore

Attenzione: Per ottenere il punteggio massimo in ogni domanda, la risposta deve essere dettagliatamente giustificata. Giustificazioni parziali potranno essere considerate per punteggi parziali. Risposte senza giustificazioni non verranno considerate. Le soluzioni ammissibili sono esclusivamente quelle nella bella. In ogni caso bisogna consegnare anche la brutta copia.

1. Sia k un numero reale e si considerino il seguente sistema di tre equazioni lineari in tre variabili x, y e z :

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ -2x - y + 5z = -1 \\ kx + y - z = 1. \end{cases}$$

- (a) **(1 punto)** Sia A la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni. Si calcoli il determinante di A (come funzione dipendente di k).
- (b) **(1 punto)** Si usi il teorema di Rouché-Capelli per determinare per quali valori di k il sistema di equazioni non ha soluzioni.
- (c) **(2 punti)** Si usi il teorema di Cramer per calcolare la soluzione del sistema quando $k = 1$.
2. Si calcolino:
- (a) **(3 punti)** il limite $\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$;
- (b) **(3 punti)** la retta tangente al grafico di $f(x) = e^{-x^2-x}$ nel punto $x = -1$.
3. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ dall'espressione $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$.
- (a) **(3 punti)** Si trovino gli zeri, gli asintoti e il segno della funzione f in tutto il suo dominio.
- (b) **(5 punti)** Si trovino gli intervalli dove f è crescente o decrescente e i punti massimi e minimi (relativi) della funzione in $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. Per ogni massimo o minimo trovato, si indichi se sono massimi o minimi assoluti.
- (c) **(2 punti)** Si trovino gli intervalli dove f è concava e dove f è convessa in $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.
- (d) **(1 punto)** Si tracci il grafico di f .
- (e) **(3 punti)** L'integrale improprio $\int_5^6 f(x) dx$ è convergente o divergente? In caso sia convergente, si calcoli il suo valore.
4. Si calcoli l'area della regione delimitata dai grafici di $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = 1 + \cos(x)$ nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.
5. Sia f una funzione di dominio $\mathbb{R}$, derivabile in ogni punto del suo dominio. Si supponga che f è pari (cioè, $f(-x) = f(x)$ per ogni x in $\mathbb{R}$).
- (a) **(1 punto)** Si dimostri che f ha almeno un punto stazionario.
- (b) **(1 punto)** Si dimostri che $x = 0$ è un punto stazionario di f .

09/07/2019

① $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ -2x - y + 5z = -1 \\ kx + y - z = 1 \end{cases}$$

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppo di Laplace} \\ \text{lungo la prima riga}}}{(-1)^{1+1}(-1)} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ k & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -(1-5) - (2-5k) + (-2+k)$$

$$= 4 - 2 + 5k - 2 + k = 6k$$

(b) Si consideri la matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 & -1 \\ k & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il teorema di Rouché-Capelli dice che il sistema ha soluzioni se e solo se $\text{rk } A = \text{rk } \tilde{A}$.

Quindi, il sistema non ha soluzioni se e solo se $\text{rk } A \neq \text{rk } \tilde{A}$. Calcoliamo il rango di A e il rango di $\tilde{A}$.

$$\text{rk } A = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0 \text{ (in questo caso } \det(A) \neq 0 \text{ e quindi il rango è massimale)} \\ 2 & \text{se } k = 0 \text{ (in questo caso } \det(A) = 0 \text{ ma esiste una sottomatrice } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \neq 0) \end{cases}$$

Invece si osserva che $\text{rk}(\tilde{A}) = 3$ qualsiasi sia il valore di k . Infatti la sottomatrice 3×3 ottenuta togliendo la prima colonna di $\tilde{A}$ ha per determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

↓
sviluppo di Laplace
lungo la prima
colonna

$$+ (-1)^{1+2} (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (5 - 1) + (1 + 3) + (-1 - 15) =$$

$$= -8 \neq 0$$

Quindi $\text{rk}(A) \neq \text{rk}(\tilde{A}) \Leftrightarrow \text{rk}(A) \neq 3$

$$\Leftrightarrow k = 0$$

(c) Per il teorema di Cramer, siccome per $k=1$ il determinante di A è $6 \cdot 1 = 6$, il sistema ha un'unica soluzione:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} \stackrel{\substack{\text{sviluppo lungo} \\ \text{prima riga}}}{=} \frac{3 \cdot (1-5) - 1 \cdot (1-5) + 1 \cdot (-1+1)}{6}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} \stackrel{\substack{\text{sviluppo lungo} \\ \text{terza riga}}}{=} \frac{1 \cdot (15+1) - 1 \cdot (-5+2) - 1 \cdot (1+6)}{6}$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} \stackrel{\substack{\text{sviluppo lungo} \\ \text{terza riga}}}{=} \frac{1 \cdot (-1+3) - 1 \cdot (1+6) + 1 \cdot (1+2)}{6}$$

Cioè, $x = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$ $y = \frac{12}{6} = 2$ $z = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

②

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan \left(\frac{1}{x-1} \right)$

Cambio di variabile / limite della funzione composta:

$$y = \frac{1}{x-1} ; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$$

Siccome $\arctan y$ è continua in $\mathbb{R}$, allora,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan \left(\frac{1}{x-1} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$$

b) $f(x) = e^{-x^2-x}$

retta tangente al grafico di f nel punto $x = -1$:

$$y = f(-1) + f'(-1)(x - (-1))$$

$$f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regola della catena}}}{=} (-2x-1)e^{-x^2-x} \leadsto f'(-1) = 1 \cdot e^0 = 1$$

$$f(-1) = e^0 = 1$$

Quindi la retta tangente è

$$y = 1 + 1 \cdot (x+1) = x+2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = x+2}$$

$$(3) a) f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$$

Zeri:

$$f(x) = 0 \quad (-) \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \text{e } x \neq 5$$

$$(-) \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \quad \text{e } x \neq 5$$

$$(=) \quad x = 1 \quad \text{e } x = 4$$

Segno:

$x^2 - 5x + 4$ è una parabola convessa (la sua seconda derivata è positiva) e quindi prende valori positivi negli intervalli $]-\infty, 1[$ e $]4, +\infty[$ e negativi nell'intervallo $]1, 4[$.

$x - 5$ è una retta di inclinazione positiva, quindi prende valori negativi in $]-\infty, 5[$ e positivi in $]5, +\infty[$.

$x^2 - 5x + 4$	+	0	-	0	+	+	+
$x - 5$	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$	-	0	+	0	-	non definita	+

Quindi $f(x)$ è positiva in $]1, 4[$ e $]5, +\infty[$ e negativa in $]-\infty, 1[$ e $]4, 5[$.

Asintoti: $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$

Siccome $x^2 - 5x + 4$ prende valori positivi in $x = 5$ ed è continua, e siccome $\lim_{x \rightarrow 5^+} x - 5 = 0^+$,

Il teorema delle operazioni sui limiti garantisce che

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = +\infty$$

Analogamente, siccome $\lim_{x \rightarrow 5^-} x - 5 = 0^-$, abbiamo

$$\text{che } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = -\infty.$$

Quindi $x = 5$ è un asintoto verticale, sia a destra che a sinistra.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}} = (*)$$

Siccome $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} = 0^+$,
abbiamo che $(*) = +\infty$ e, quindi, f non ha
un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

Analogamente, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = -\infty$ e
quindi f non ha asintoti orizzontali per $x \rightarrow -\infty$.

Asintoti obliqui?

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x - 5)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 5x} + \frac{4}{x^2 - 5x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{4}{x^2 - 5x} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} - \frac{x(x-5)}{x-5} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{5x} + 4 - \cancel{x^2} + \cancel{5x}}{x - 5} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x - 5} = 0$$

↳ per il teorema delle operazioni sui limiti.

Quindi $y = x$ è un asintoto obliquo ^{sig} per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$.

$$b) f'(x) = \frac{(2x-5)(x-5) - 1 \cdot (x^2 - 5x + 4)}{(x-5)^2}$$

↓
derivata del
quoziente

$$= \frac{2x^2 - 10x - \cancel{5x} + 25 - \cancel{x^2} + \cancel{5x} - 4}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 10x + 21}{(x-5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x^2 - 10x + 21 = 0 \quad \text{e } x \neq 5$$

$$(\Rightarrow) \quad x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} \quad \text{e } x \neq 5$$

$$(\Rightarrow) \quad x = 7 \quad \text{e} \quad x = 3$$

Segno della derivata:

$x^2 - 10x + 21$ è una parabola convessa (seconda derivata positiva) e, quindi, è positiva in $]-\infty, 3[$ e $]7, +\infty[$ e negativa in $]3, 7[$.

$(x-5)^2$ è sempre positivo per $x \neq 5$.

Quindi,

$f'(x) > 0$ se $x \in]-\infty, 3[$ o $x \in]7, +\infty[\rightarrow f$ è crescente

$f'(x) < 0$ se $x \in]3, 7[\rightarrow f$ è decrescente

In particolare, $x=3$ è un massimo relativo ma non assoluto (per esempio $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$) e $x=7$ è un minimo relativo ma non assoluto (per esempio $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty$)

$$c) f''(x) = \frac{(2x-10)(x-5)^2 - 2(x-5)(x^2-10x+21)}{(x-5)^4}$$

↓
regola della derivata
del quoziente

$$= \frac{(2x-10)(x-5) - 2(x^2-10x+21)}{(x-5)^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 10x - 10x + 50 - 2x^2 + 20x - 42}{(x-5)^3}$$

$$= \frac{8}{(x-5)^3}$$

$f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ (quindi non ci possono essere flessi)

$f''(x) > 0$ se $x > 5 \leadsto f$ è convessa per $x > 5$

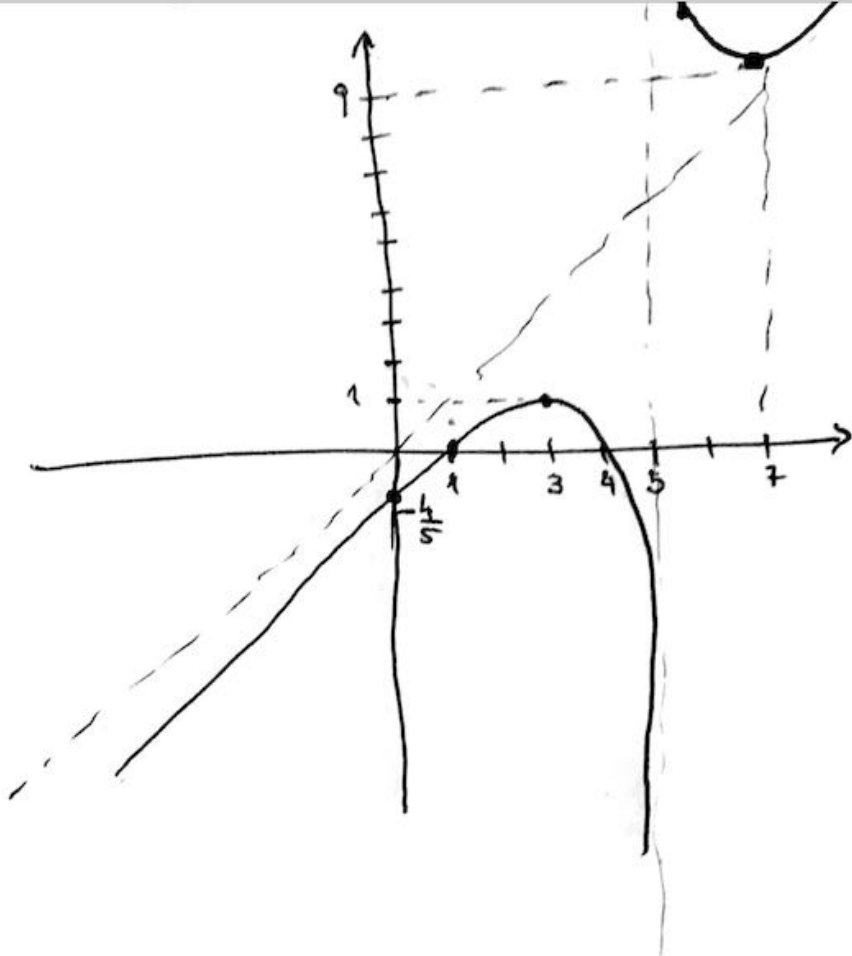
$f''(x) < 0$ se $x < 5 \leadsto f$ è concava per $x < 5$

d) Grafico di f:

$$f(3) = \frac{9-15+4}{3-5} = 1$$

$$f(7) = \frac{49-35+4}{7-5} = 9$$

$$f(0) = -\frac{4}{5}$$



e) $\int_5^6 f(x) dx = \lim_{b \rightarrow 5^+} \int_b^6 f(x) dx$

$= \lim_{b \rightarrow 5^+} \int_b^6 \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} dx = (*)$

divisione di polinomi:

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 4 \quad | \quad x - 5 \\ -x^2 + 5x \quad \quad \quad \\ \hline 4 \end{array}$$

Quindi: $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = x + \frac{4}{x - 5}$

$(*) = \lim_{b \rightarrow 5^+} \int_b^6 x + \frac{4}{x - 5} dx =$

$= \lim_{b \rightarrow 5^+} \left[\frac{x^2}{2} + 4 \ln |x - 5| \right]_b^6 =$

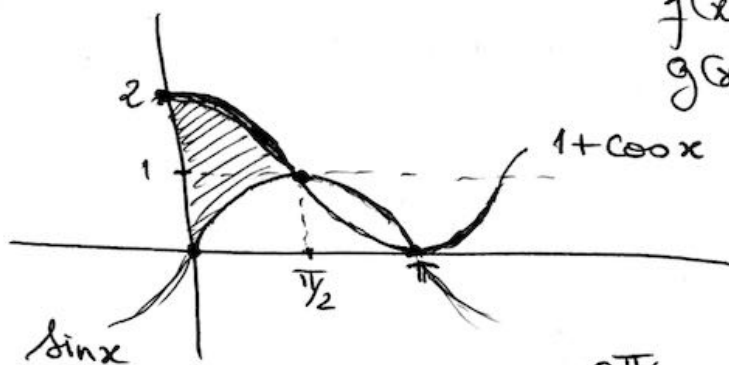
$= \lim_{b \rightarrow 5^+} \left(\frac{36}{2} + 4 \ln 1 - \left(\frac{b^2}{2} + 4 \ln |b - 5| \right) \right) =$

$$= \lim_{b \rightarrow 5^+} 18 - \frac{b^2}{2} - 4 \ln |b-5| = +\infty$$

$$\lim_{b \rightarrow 5^+} \ln |b-5| = \lim_{x \rightarrow 0} \ln |x| = -\infty$$

Quindi, questo integrale è divergente.

④



$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = 1 + \cos x$$

$$\text{Area} = \int_0^{\pi/2} |g(x) - f(x)| dx$$

Siccome per $x \in [0, \pi/2]$ $1 + \cos x \geq 1 \geq \sin x$,

abbiamo che $|1 + \cos x - \sin x| = 1 + \cos x - \sin x$

$$\text{Quindi, Area} = \int_0^{\pi/2} |1 + \cos x - \sin x| dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} 1 + \cos x - \sin x dx$$

$$= \left[x + \sin x + \cos x \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) - (0 + \sin 0 + \cos 0)$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 + 0 - (0 + 0 + 1) = \frac{\pi}{2}$$

⑤ a) Siccome f è derivabile in $\mathbb{R}$, allora f è continua in $\mathbb{R}$.
In particolare, f è continua in $[-1, 1]$ e derivabile in $] -1, 1[$. Siccome f è pari, allora $f(-1) = f(1)$ e, per il teorema di Rolle, $\exists c \in] -1, 1[$ tale che $f'(c) = 0$.

b) Dimostriamo che $f'(0) = 0$.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Siccome f è derivabile in $x=0$, abbiamo che $f'_+(0) = f'_-(0)$.

Ma, possiamo usare il teorema del cambio di variabili nel calcolo dei limiti per osservare che

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{f(-y) - f(0)}{-y}$$

$$\begin{aligned} & \downarrow y = -x \\ & \downarrow x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow 0^- \\ & = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{f(y) - f(0)}{-y} = -f'_-(0) \end{aligned}$$

$\downarrow$
 f è pari

Eiòè, abbiamo

$$\begin{cases} f'_+(0) = f'_-(0) \\ f'_+(0) = -f'_-(0) \end{cases}$$

Quindi $f'_-(0) = -f'_-(0)$ e, di conseguenza
concludiamo che $f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0) = 0$

In Alternativa

Lo stesso ragionamento di 5a) (con l'uso del teorema di Rolle) garantisce l'esistenza di un punto stazionario in ogni intervallo $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ e, quindi esiste un punto stazionario nella intersezione

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$$

Quindi $x=0$ è un punto stazionario di f .