

Esame per il Corso di MATEMATICA 2
Università di Studi di Cagliari, 2018/2019
Corso di Laurea in Chimica

20 Giugno 2019

Durata: 3 ore

Attenzione: Per ottenere il punteggio massimo in ogni domanda, la risposta deve essere dettagliatamente giustificata. Giustificazioni parziali potranno essere considerate per punteggi parziali. Risposte senza giustificazioni non verranno considerate. Le soluzioni ammissibili sono esclusivamente quelle nella bella. In ogni caso bisogna consegnare anche la brutta copia.

1. Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (a) **(1 punto)** Si calcoli il prodotto vettoriale $v \times w$.
 - (b) **(1 punto)** Si calcoli l'area del parallelogramma definito dai vettori v e w .
 - (c) **(2 punti)** Si calcoli l'angolo fra v e w .
2. Si calcolino:
- (a) **(3 punti)** il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$;
 - (b) **(3 punti)** la retta tangente al grafico di $f(x) = \ln(\sin(x) + \cos(x))$ nel punto $x = \frac{\pi}{2}$.
3. Si consideri la funzione definita in $]0, +\infty[$ dall'espressione $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
- (a) **(3 punti)** Si trovino gli zeri, gli asintoti e il segno della funzione f in tutto il suo dominio.
 - (b) **(5 punti)** Si trovino gli intervalli dove f è crescente o decrescente e i punti massimi e minimi (relativi) della funzione nel suo dominio. Per ogni massimo o minimo trovato, si indichi se sono massimi o minimi assoluti.
 - (c) **(2 punti)** Si trovino gli intervalli dove f è concava e dove f è convessa. Esistono flessi?
 - (d) **(1 punto)** Si tracci il grafico di f .
 - (e) **(3 punti)** Si calcoli l'integrale indefinito di f .
4. **(4 punti)** Si calcoli l'area della regione delimitata dai grafici di $g(x) = x^2 - 5x + 4$ e $h(x) = -x^2 - 2x + 3$.
5. Sia f una funzione di dominio $\mathbb{R}$ tale che f è dispari, cioè, $f(-x) = -f(x)$, per ogni x in $\mathbb{R}$. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ esiste ed è finito. Si dimostri che
- (a) **(1 punto)** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$;
 - (b) **(1 punto)** f è continua nel punto $x = 0$.

20/06/2019

$$① \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad v \times w = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= e_1 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - e_2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppo di
laplace lungo
la prima riga

$$= -2e_1 + e_2 - 2e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \text{L'area del parallelogramma definito dai vettori } v \text{ e } w \text{ è } \|v \times w\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3.$$

$$c) \quad \text{Abbiamo che } \|v \times w\| = \|v\| \|w\| \sin \theta$$

$$\text{Siccome } \|v\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{e } \|w\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{abbiamo } 3 = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \theta \Leftrightarrow \theta = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

②

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{x (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}
 \end{aligned}$$

Siccome $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ è continua in $x = 0$,
abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2$.

Quindi, per il teorema delle operazioni sui limiti,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1.$$

b) Siccome f è una composizione di funzioni derivabili, allora f è derivabile nel punto $x = \pi/2$. Quindi la retta tangente al grafico di f nel punto $x = \pi/2$ è

$$y = f(\pi/2) + f'(\pi/2)(x - \pi/2)$$

Calcoliamo $f'(x)$.

Per la regola della catena, $f'(x) = \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} \cdot (\cos(x) - \sin(x))$

Ciòè, $f'(x) = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$ (II)

In particolare, $f'(\pi/2) = \frac{\cos(\pi/2) - \sin(\pi/2)}{\sin(\pi/2) + \cos(\pi/2)}$

$$= \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$$

$$f(\pi/2) = \ln(\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)) = \ln 1 = 0$$

Quindi la retta tangente al grafico di f nel punto $x = \pi/2$ è $y = 0 - 1(x - \pi/2)$

$$\Rightarrow \boxed{y = \pi/2 - x}$$

③ $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

a) Zeri di f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = 0$

$$\Rightarrow \ln(x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Asintoti di f : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

teorema delle operazioni sui limiti
 operazioni sui limiti
 verticale

Quindi $x=0$ è un asintoto
 (a destra)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = ?$$

Siccome $\ln(x)$ e x sono derivabili in tutti punti dei loro domini, e siccome $(x)' = 1 \neq 0$,

Per la regola di de L'Hôpital abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Quindi $y = 0$ è un asintoto orizzontale (a destra)
(Per questo non ci sono asintoti obliqui)

Segno di f $\frac{\ln(x)}{x} > 0 \Leftrightarrow$

$$(\Rightarrow) \ln(x) > 0 \text{ e } x > 0$$

$$\text{oppure } \ln(x) < 0 \text{ e } x < 0$$

Si osserva che, siccome il dominio di f è $]0, +\infty[$, il secondo caso (con $x < 0$) non succede. Quindi,

$$\frac{\ln(x)}{x} > 0 \quad (\Rightarrow) \ln(x) > 0 \text{ e } x > 0$$

$$(\Rightarrow) x > 1$$

$$\text{e } \frac{\ln(x)}{x} < 0 \quad (\Rightarrow) \ln(x) < 0 \text{ e } x > 0$$

$$(\Rightarrow) x < 1 \text{ e } x > 0.$$

$$f(x) > 0 \quad (\Rightarrow) x \in]1, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \quad (\Rightarrow) x \in]0, 1[.$$

b) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

↓
derivata del quoziente

Punti stazionari di f :

III

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

$$(\Rightarrow) 1 - \ln(x) = 0$$

$$(\Rightarrow) \ln(x) = 1 \quad (\Rightarrow) x = e$$

Segno della derivata

$$f'(x) > 0 \quad (\Rightarrow) \quad 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} > 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad 1 - \ln(x) > 0 & \quad (\Rightarrow) 1 > \ln(x) \\ x^2 > 0 & \quad (\Rightarrow) x < e \\ \forall x > 0 & \end{aligned}$$

$$f'(x) < 0 \quad (\Rightarrow) \quad 1 - \ln(x) < 0 \quad (\Rightarrow) x > e.$$

Quindi f è strettamente ~~crescente~~ crescente nell'intervallo $]0, e[$ e strettamente decrescente nell'intervallo $]e, +\infty[$.

Quindi $f(x)$ ha un massimo relativo in $x = e$, infatti, questo è un massimo assoluto perché $f(x)$ è crescente fino a $x = e$ e decrescente sempre dopo.

$$e) f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln(x))}{x^2} =$$

derivata del quoziente

$$= \frac{-x - 2x + 2x \ln(x)}{x^4}$$

$$= \frac{-3x + 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln(x)}{x^3}$$

Zeri della seconda derivata

$$f''(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad -3 + 2 \ln(x) = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad 2 \ln(x) = 3$$

$$(\Rightarrow) \quad \ln(x) = \frac{3}{2}$$

$$(\Rightarrow) \quad x = e^{\frac{3}{2}}$$

Segno della seconda derivata

$$f''(x) > 0 \quad (\Rightarrow) \quad -3 + 2 \ln(x) > 0$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \ln(x) > \frac{3}{2}$$

$$(\Rightarrow) \quad x > e^{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) < 0 \quad (\Rightarrow) \quad -3 + 2 \ln(x) < 0$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \ln(x) < \frac{3}{2}$$

$$(\Rightarrow) \quad x < e^{\frac{3}{2}}$$

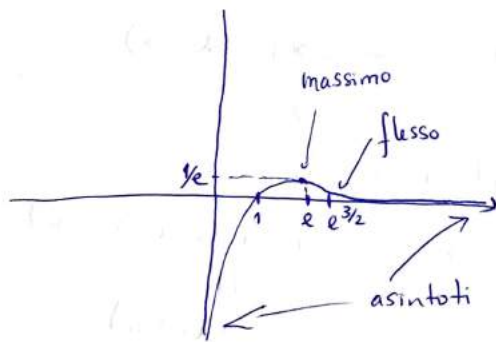
Quindi f è concava nell'intervallo $]0, e^{\frac{3}{2}}[$ e

Convessa nell'intervallo $]e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$.

In particolare $x = e^{\frac{3}{2}}$ è un flesso.

$$f(e) = \frac{1}{e}$$

d)



e) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

(IV)

Sostituzione:

$y = \ln x$

$dy = \frac{1}{x} dx$

$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int y dy$
 $= \frac{y^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

verifica:

$\left(\frac{1}{2} \ln^2 x + C \right)' =$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} (\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$

Alternativa:

Integrazione per parti

$\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \underbrace{\ln x}_g dx = \ln^2 x - \int \frac{1}{x} \ln x dx$

Quindi $2 \int \frac{1}{x} \ln x dx = \ln^2 x$

e allora $\int \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

④

$g(x) = x^2 - 5x + 4$

$h(x) = -x^2 - 2x + 3$

$g(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ o } x = 4$

$h(x) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ o } x = 1$

$g(x) = h(x) \Rightarrow x = 1 \text{ o } x = \frac{1}{2}$

$g''(x) = 2 > 0 \leadsto$ Parabola Convessa

$h'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ massimo

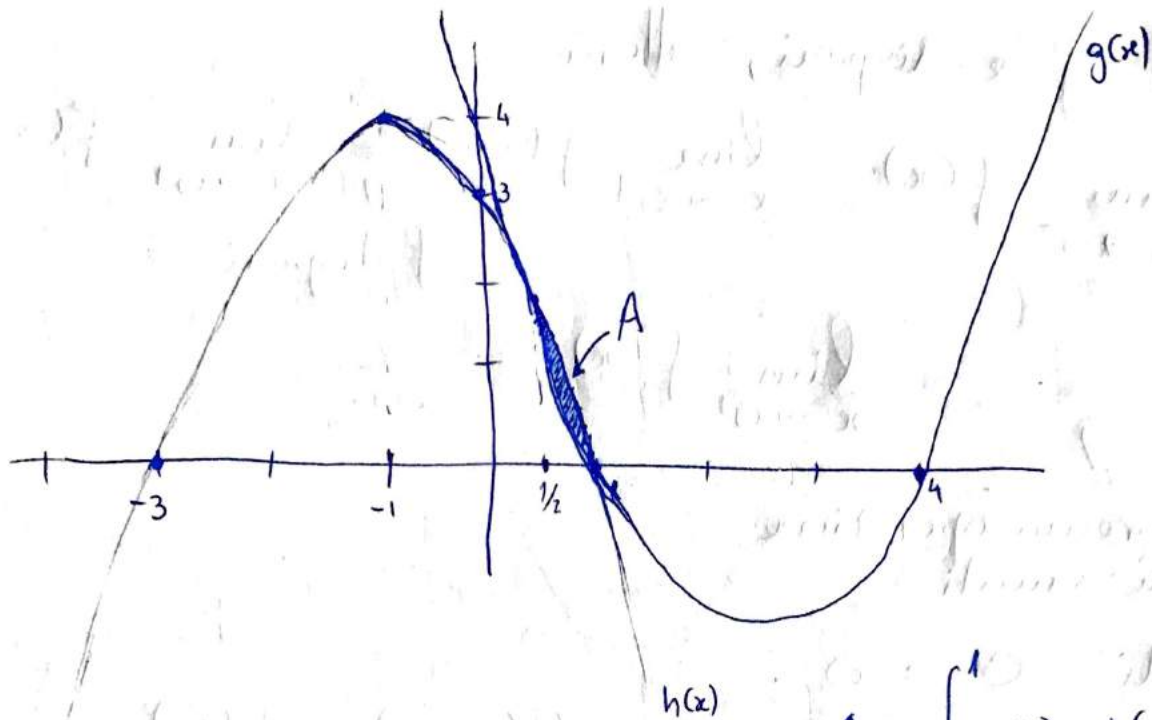
$g'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ minimo

$h''(x) = -2 < 0 \leadsto$ Parabola concava

Chi è maggiore nell'intervallo $]\frac{1}{2}, 1[$?

$g(x) - h(x) = 2x^2 - 3x + 1 \leadsto$ zeri $\frac{1}{2}$ e 1
 $\leadsto$ negativa fra $\frac{1}{2}$ e 1

Quindi $h(x) > g(x)$ in quell'intervallo.



$$A = \int_{\frac{1}{2}}^4 g(x) - h(x) dx$$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^4 -x^2 - 2x + 3 - (x^2 - 5x + 4) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^4 -2x^2 + 3x - 1 dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{3x^2}{2} - x \right]_{\frac{1}{2}}^4$$

$$= \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1 \right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left(-\frac{4}{6} + \frac{9}{6} - \frac{6}{6} \right) - \left(-\frac{2}{24} + \frac{9}{24} - \frac{12}{24} \right)$$

$$= -\frac{1}{6} - \left(-\frac{5}{24} \right)$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{5}{24} = -\frac{4}{24} + \frac{5}{24} = \frac{1}{24}$$

- ⑤ Sia f una funzione di dominio $\mathbb{R}$ tale che f è dispari.
 Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ esiste ed è finito, cioè
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = c$. Quindi i limiti laterali esistono
 e sono uguali: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = c = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
 Ma, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ per sostituzione di
 variabile.

Siccome f è dispari, allora

(V)

$$c = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-x) \underset{f \text{ dispari}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} -f(x)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -c$$

Teorema operazione
sui limiti

Quindi $c = 0$.

Osserviamo anche che $f(-0) = f(0)$
" $\leftarrow f$ è dispari
 $-f(0)$
 $\Rightarrow f(0) = 0$

Allora abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) \text{ e}$$

quindi f è continua nel punto $x=0$. $\square$