

Esame modello per il Corso di MATEMATICA 2

7 Giugno 2019

Durata: 3 ore

Attenzione: Per ottenere il punteggio massimo in ogni domanda, ogni risposta deve essere dettagliatamente giustificata. Giustificazioni parziali saranno considerate per punteggi parziali. Risposte senza giustificazioni non verranno considerate.

1. Per qualsiasi numero reale k , si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 10 & k & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) **(1 punto)** Si calcoli il determinante della matrice A_k come funzione di k .

Per il sviluppo di Laplace lungo la terza riga, il determinante di A_k è $\det(A_k) = -3(-6k + 50)$.

- (b) **(1 punto)** Per ogni k , si determini il rango di A_k .

Chiaramente $\det(A_k) = 0$ se e solo se $k = \frac{50}{6}$. Quindi per $k \neq \frac{50}{6}$, la matrice A_k ha rango 3 (il suo determinante è diverso da zero). Invece, per $k = \frac{50}{6}$, si osservi che il determinante della sottomatrice ottenuta eliminando la prima riga e la prima colonna è $\frac{-150}{6} \neq 0$, e quindi il rango di $A_{\frac{50}{6}}$ è 2.

- (c) **(2 punti)** Si usi la regola di Cramer per calcolare le soluzioni del sistema di equazioni lineari definito da

$$\begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 10 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è A_9 , e quindi il suo determinante è $-3(-6 \times 9 + 50) = 12$

Per la regola di Cramer abbiamo allora che

$$x = \frac{1}{12} \det \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{15}{12} = -\frac{5}{4}$$

$$y = \frac{1}{12} \det \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{1}{12} \det \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 10 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

dove i determinanti vengono calcolati con l'uso dei sviluppi di Laplace lungo la terza colonna nei due primi casi e lungo la terza riga nell'ultimo caso.

2. Si calcolino:

(a) **(3 punti)** il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)(1 + \cos(x))}{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)(1 + \cos(x))}{1 - \cos^2(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)(1 + \cos(x))}{\sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \cos(x))}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)}(1 + \cos(x)) \end{aligned}$$

Siccome $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, il teorema delle operazioni sui limiti dimostra che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Siccome $1 + \cos(x)$ è continua nel punto $x = 0$ (è una somma di una funzione costante con una funzione trigonometrica, e queste sono continue), allora $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \cos(x) = 1 + \cos(0) = 2$. Finalmente, di nuovo per il teorema delle operazioni sui limiti, abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)}(1 + \cos(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos(x)) = 1 \times 2 = 2$. Quindi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} = 2.$$

(b) **(3 punti)** la retta tangente al grafico di $f(x) = xe^{\cos(x)}$ nel punto $x = \pi$.

Calcoliamo la derivata di $f(x)$. Per questo calcolo usiamo la regola di Leibniz (derivata di un prodotto) e la regola della catena (derivata della composta).

$$f'(x) = 1 \times e^{\cos(x)} + xe^{\cos(x)}(-\sin(x)) = e^{\cos(x)}(1 - x \sin(x))$$

Adesso, sappiamo che la equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x = \pi$ è

$$y = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi)$$

Siccome $f(\pi) = \pi e^{-1} = \frac{\pi}{e}$ e $f'(\pi) = e^{-1}(1 - \pi \sin(\pi)) = \frac{1}{e}$, abbiamo che la retta tangente al grafico di f nel punto $x = \pi$ è

$$y = \frac{\pi}{e} + \frac{1}{e}(x - \pi) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}x$$

3. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}$ per l'espressione $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$.

(a) **(3 punti)** Si trovino i zeri, gli asintoti e il segno della funzione f in tutto il suo dominio.

I zeri della funzione sono i punti x dove $f(x) = 0$. Per trovare i zeri, sostituiamo $y = e^x$ e abbiamo che $f(x) = 0$ se e solo se $y^2 - 3y + 2 = 0$. Questa equazione quadratica ha per soluzioni $y = 2$ e $y = 1$. Quindi $f(x) = 0$ se e solo se $e^x = 2$ o $e^x = 1$. Applichiamo logaritmi ai due lati delle equazioni e otteniamo $x = \ln(2)$ e $x = 0$ come zeri della funzione f .

Siccome il polinomio $y^2 - 3y + 2$ si può riscrivere come un prodotto $(y - 1)(y - 2)$, allora abbiamo che $f(x) = (e^x - 1)(e^x - 2)$. Il segno di ogni fattore è facile di determinare: $e^x - 1 > 0$ se e solo se $e^x > 1$ e questo succede precisamente quando $x > 0$; $e^x - 2 > 0$ se e solo se $e^x > 2$ e questo succede precisamente quando $x > \ln(2)$. Quindi, abbiamo che $f(x) > 0$ per $x < 0$ e per $x > \ln(2)$ e $f(x) < 0$ per $x \in]0, \ln(2)[$.

Finalmente guardiamo gli asintoti.

- Questa funzione ha per dominio $\mathbb{R}$ e è continua in $\mathbb{R}$, quindi $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ per qualsiasi $c \in \mathbb{R}$. Questo significa che f non ha asintoti verticali.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1)(e^x - 2)$. Siccome $e^x - 1$ e $e^x - 2$ tendono a $+\infty$ per x tendente a $+\infty$, allora per il teorema delle operazioni sui limiti, abbiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, quindi non esiste un asintoto orizzontale per x tendente a $+\infty$. Dobbiamo verificare allora se esiste un asintoto obliquo. Per questo motivo, cerchiamo di calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1)(e^x - 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \frac{1}{e^x})(1 - \frac{2}{e^x})}{\frac{x}{e^x}}$$

Per calcolare questo limite ci serve calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$. Possiamo usare, per esempio, la Regola di de L'Hôpital per concludere che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ e, quindi, per il teorema delle operazioni sui limiti, possiamo concludere che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, cioè, non esiste un asintoto obliquo per x tendente a $+\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1)(e^x - 2) = (-1)(-2) = 2$. Queste segue dal teorema delle operazioni sui limiti, insieme al fatto che $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Quindi esiste un asintoto orizzontale $y = 2$ per x tendente a $-\infty$.

- (b) **(5 punti)** Si trovino gli intervalli dove f è crescente o decrescente e i punti massimi e minimi (relativi) della funzione nel suo dominio. Per ogni massimo o minimo trovato, si indichi se sono massimi o minimi assoluti.

Troviamo la funzione derivata di f . Usiamo la conoscenza della derivata delle esponenziale e la regola della catena.

$$f'(x) = 2e^{2x} - 3e^x = e^x(2e^x - 3)$$

Calcoliamo i punti stazionari: $f'(x) = 0$ se e solo se $2e^x - 3 = 0$ (la esponenziale e^x non si annulla mai). Quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \ln(\frac{3}{2})$. Vediamo adesso il segno della derivata. Chiaramente abbiamo che $e^x > 0$ per ogni x in $\mathbb{R}$; da un'altra parte abbiamo che $2e^x - 3 > 0$ se e solo se $x > \ln(\frac{3}{2})$. Quindi $f'(x) > 0$ per $x > \ln(\frac{3}{2})$ e $f'(x) < 0$ per $x < \ln(\frac{3}{2})$. Questo significa che f è decrescente in $] - \infty, \ln(\frac{3}{2})[$ e crescente in $] \ln(\frac{3}{2}), +\infty[$. Concludiamo allora che $\ln(\frac{3}{2})$ è un minimo relativo. Infatti, questo è un minimo assoluto: la funzione è decrescente da $-\infty$ a quel punto, e diventa crescente da quel punto a $+\infty$, quindi la funzione non prende valori inferiori a quello che prende nel punto $x = \ln(\frac{3}{2})$.

- (c) **(2 punti)** Si trovino gli intervalli dove f è concava e dove f è convessa.

Calcoliamo la seconda derivata di $f(x)$. Usiamo la regola di Leibniz:

$$f''(x) = e^x(2e^x - 3) + e^x(2e^x) = e^x(4e^x - 3)$$

Chiaramente la seconda derivata si annulla esclusivamente nel punto $x = \ln(\frac{3}{4})$. Siccome $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo che la seconda derivata è negativa per $x < \ln(\frac{3}{4})$ e positiva per $x > \ln(\frac{3}{4})$. Concludiamo allora che la funzione f è concava nell'intervallo $] - \infty, \ln(\frac{3}{4})[$ e convessa nell'intervallo $] \ln(\frac{3}{4}), +\infty[$. In particolare, il punto $x = \ln(\frac{3}{4})$ è un flesso.

- (d) **(1 punto)** Si traci il grafico di f .

Abbiamo tutte le informazioni per tracciare il grafico di f . I punti fondamentali per questo disegno sono: i zeri di f ($x = 0$ e $x = \ln(2)$), il minimo assoluto ($x = \ln(\frac{3}{2})$) e il flesso $x = \ln(\frac{3}{4})$. In più dobbiamo ricordare che la retta $y = 2$ è un asintoto per x tendente a $-\infty$, e che la funzione è concava nell'intervallo $] - \infty, \ln(\frac{3}{4})[$ e convessa nell'intervallo $] \ln(\frac{3}{4}), +\infty[$, e decrescente in $] - \infty, \ln(\frac{3}{2})[$ e crescente in $] \ln(\frac{3}{2}), +\infty[$. (Grafico disegnato in lezione).

- (e) **(3 punti)** L'integrale $\int_{-\infty}^0 2 - f(x) dx$ è convergente o divergente? In caso sia convergente, si calcoli il suo valore.

Per definizione di integrale improprio, abbiamo che

$$\int_{-\infty}^0 2 - f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 3e^x - e^{2x} \, dx$$

Una primitiva di $3e^x - e^{2x}$ è $3e^x - \frac{e^{2x}}{2} = e^x(3 - \frac{e^x}{2})$. Quindi, per il teorema fondamentale del calcolo,

$$\int_a^0 3e^x - e^{2x} \, dx = (3 - \frac{1}{2}) - e^a(3 - \frac{e^a}{2})$$

Quindi, abbiamo che

$$\int_{-\infty}^0 2 - f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{5}{2} - e^a(3 - \frac{e^a}{2}) = \frac{5}{2}.$$

Concludiamo allora che l'integrale $\int_{-\infty}^0 2 - f(x) \, dx$ è convergente e vale $\frac{5}{2}$.

4. **(3 punti)** Si calcoli l'area della regione delimitata per il grafico di $h(x) = x^3 - 1$ e le rette $y = 7$ e $x = -1$;

Prima troviamo le intersezioni delle rette col grafico di f . Allora $f(x) = 7$ se e solo se $x = 2$, e $f(-1) = -2$. In più, abbiamo che per ogni $x < 2$, $x^3 - 1 < 7$. Quindi per calcolare l'area A richiesta, dobbiamo calcolare

$$A = \int_{-1}^2 7 - (x^3 - 1) \, dx = \int_{-1}^2 8 - x^3 \, dx$$

Siccome $8x - \frac{x^4}{4}$ è una primitiva di $8 - x^3$, il teorema fondamentale del calcolo ci garantisce che

$$A = \int_{-1}^2 8 - x^3 \, dx = (8 \cdot 2 - \frac{2^4}{4}) - (8 \cdot (-1) - \frac{(-1)^4}{4}) = 12 - (-8 - \frac{1}{4}) = \frac{81}{4}$$

5. **(2 punti)** Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Si dimostri che, se $\int_a^b f(x) \, dx = 0$, allora esiste c in $]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.

Sia F una primitiva di f in $[a, b]$. Per il teorema fondamentale del calcolo, F è continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ e $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx = 0$, cioè, $F(b) = F(a)$. Per il teorema di Rolle, abbiamo allora che esiste c nell'intervallo $]a, b[$ dove $F'(x) = 0$. Ma $F'(x) = f(x)$ e quindi abbiamo dimostrato che esiste c in $]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.