

Domanda	1(a)	1(b)(i)	1(b)(ii)	1(b)(iii)	1(c)	2(a)	2(b)	2(c)	3	Totale
Punti										

Test diagnostico MATEMATICA 2 (08/05/2019)

Corso di Laurea in Chimica, Università di Studi di Cagliari

Questo Test diagnostico serve per un lavoro di autovalutazione e per dare una indicazione delle difficoltà sui contenuti del corso. La durata di questo test è **30 minuti**. La correzione viene fatta collettivamente subito dopo, e le domande sono fatte in tale modo che questa sia veloce. Le metodologie/giustificazioni non vengono valutate in questo test ma, ovviamente, **lo saranno nel esame!**

- Si determini se le seguenti affermazioni sono vere o false.
 - (2 punti)** Sia f una funzione derivabile in un punto c . Se $f'(c) = 0$ allora esiste un intervallo aperto $]c - \delta, c + \delta[$ ($\delta > 0$) tale che f è costante in $]c - \delta, c + \delta[$.
 - Sia f una funzione derivabile in $\mathbb{R}$. Supponiamo che $f'(-1)f'(1) < 0$.
 - (2 punti)** Allora, esiste un punto stazionario di f nell'intervallo $] - 1, 1[$.¹
 - (2 punti)** Allora, esiste un massimo relativo di f nell'intervallo $] - 1, 1[$.
 - (2 punti)** Se $f''(x) > 0$ per ogni x nell'intervallo $] - 1, 1[$, allora esiste un minimo relativo nell'intervallo $] - 1, 1[$.
 - (2 punti)** Sia f una funzione continua nell'intervallo $[3, 5]$ e derivabile nell'intervallo $]3, 5[$. Se $f(5) = f(3) + 4$, allora esiste c nell'intervallo $]3, 5[$ tale che $f'(c) = 2$.
- Siano $f(x) = e^{1-x^2}$, $g(x) = \ln(1-x)$ e $h(x) = \sin(x^2 + x)$. Si calcolino:
 - (5 punti)** il valore della derivata $f'(-1)$.
 - (5 punti)** il limite $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - \ln(2)}{x+1}$.
 - il valore m **(3 punti)** e il valore b **(2 punti)** nell'equazione $y = mx + b$ della retta tangente al grafico di h nel punto -1 .
- (5 punti)** Sia $f(x) = x^3 - 12x + 2$. Si scelga la affermazione corretta.
 - f ha un minimo relativo in $x = -2$, un massimo relativo in $x = 2$ e un flesso in $x = 0$.
 - f ha un massimo assoluto in $x = -2$ e un minimo assoluto in $x = 2$.
 - f è concava in $] - \infty, 0[$ e convessa in $]0, +\infty[$.
 - f ha due punti stazionari e non ha flessi.

¹La risposta a questa domanda risulta più difficile di quello che avevo voluto chiedere; quindi tutti devono aggiungere questi due punti al totale

Soluzioni (con giustificazioni)

1. (a) **Falsa:** Per esempio, la funzione $f(x) = x^2$ soddisfa $f'(0) = 0$ ma f non è costante in nessun intervallo aperto di $\mathbb{R}$.
 - (b) i. **Vera:** Se $f(-1) = f(1)$, allora il Teorema di Rolle ci garantisce la esistenza di un punto stazionario (anche senza l'ipotesi $f'(-1)f'(1) < 0$). Supponiamo invece che $f(-1) < f(1)$ e che $f'(-1) > 0$ e $f'(1) < 0$ (gli altri caso si dimostrano analogamente). Allora siccome $f'(1) > 0$, allora f è strettamente decrescente in un intervallo aperto $]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$, per alcun $\epsilon > 0$. In particolare, $f(1 - \epsilon) > f(1)$. Allora consideriamo la funzione f definita nell'intervallo $] - 1, 1 - \epsilon[$. Siccome f è derivabile, f è anche continua e, quindi, per il teorema del valore intermedio, per ogni y fra $f(-1)$ e $f(1 - \epsilon)$, esiste c nel intervallo $] - 1, 1 - \epsilon[$ tale che $f(c) = y$. In particolare, se prendiamo $y = f(1)$ (che, ricordiamo, è infatti un valore fra $f(-1)$ e $f(1 - \epsilon)$), esiste c nel intervallo $] - 1, 1 - \epsilon[$ tale che $f(c) = f(1)$. Adesso applichiamo il teorema di Rolle all'intervallo $[c, 1]$ per concludere che esiste un punto stazionario fra c e 1 (e, quindi, in particolare, fra -1 e 1).
 - ii. **Falsa:** Non è detto che questo punto stazionario dev'essere per forza un massimo. Per esempio, $f(x) = x^2$ ha un punto stazionario in $x = 0$ che non è un massimo di f .
 - iii. **Vera:** Se $f''(x) > 0$ nell'intervallo $] - 1, 1[$, allora $f'(x)$ è strettamente crescente in $] - 1, 1[$ e quindi $f'(x)$ sarà negativa prima del punto stazionario c e positiva dopo il punto stazionario c . Allora, f sarà strettamente decrescente fino a c e crescente dopo c . Allora f ha un minimo (relativo) nel punto c .
 - (c) **Vera:** Per il teorema del valore medio di Lagrange, esiste c nell'intervallo $]3, 5[$ tale che $f'(c) = \frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$.
2. (a) $f'(-1) = 2$
Per la regola della catena, abbiamo che $f'(x) = e^{1-x^2}(-2x)$ e, quindi, $f'(-1) = e^0(-2(-1)) = 2$.
 - (b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - \ln(2)}{x+1} = -\frac{1}{2}$
Per definizione di derivata di g nel punto -1 , abbiamo che $g'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - \ln(2)}{x+1}$. Siccome g è derivabile in tutti punti del suo dominio (g è la composizione di funzioni derivabili), per ogni $x < -1$ abbiamo che $g'(x) = \frac{-1}{1-x}$ e, quindi, $g'(-1) = -\frac{1}{2}$. Allora, concludiamo che $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - \ln(2)}{x+1} = -\frac{1}{2}$.
 - (c) $m = -1$ e $b = -1$
Siccome h è derivabile nel punto -1 , la retta tangente al grafico di h in quel punto è $y = h(-1) + h'(-1)(x+1) = h'(-1)x + (h(-1) + h'(-1))$. Per la regola della catena, abbiamo che $h'(x) = (2x+1)\cos(x^2+x)$ e quindi, abbiamo che $m = h'(-1) = (-2+1)\cos(0) = -1$ e che $b = h(-1) + h'(-1) = \sin(0) - 1 = -1$.
3. La affermazione corretta è la (c). Infatti, la funzione derivata $f'(x) = 3x^2 - 12$ ha due zeri: $x = 2$ e $x = -2$ e la funzione $f''(x) = 6x$ ha un zero: $x = 0$. Chiaramente $f''(x)$ cambia segno in $x = 0$ e, quindi, $x = 0$ è un flesso. Questo esclude l'affermazione (d). In più, il segno di $f''(x)$ è negativo per $x < 0$ e positivo per $x > 0$. Quindi la funzione f è concava per $x < 0$ e convessa per $x > 0$, come volevamo dimostrare. Si osservi anche che $f'(x) > 0$ nell'intervallo $] - \infty, -2[$ e nell'intervallo $]2, +\infty[$ e che $f'(x) < 0$ in $] - 2, 2[$. Quindi f è crescente fino a -2 , decrescente fra -2 e 2 e nuovamente crescente da 2 in poi. Si conclude allora che f ha un massimo relativo in $x = -2$ e un minimo relativo in $x = 2$ (e questo esclude affermazione (a)). Questo massimo e questo minimo non sono assoluti: infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Questo esclude l'affermazione (b).