

Esercizi per il Corso di MATEMATICA 2

Foglio 6

12 aprile 2019

1. Per ogni delle seguenti funzioni derivabili nel suo dominio si trovi la sua funzione derivata.

(a) $a(x) = \sqrt[4]{x} + x$

(b) $b(x) = x \ln(x) - x$

(c) $c(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}$

(d) $d(x) = \sin(\ln(x))$

(e) $e(x) = \arccos^2(x^3)$

(f) $f(x) = \frac{\ln(x^2+3x)}{\sin(x)}$

(g) $g(x) = xe^{x^2}$

(h) $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$

(i) $i(x) = (3x^2 + 2)e^{\cos(x)+1}$

(j) $j(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$

(k) $k(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-3}}$

(l) $l(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

2. Si determinino tutti i punti stazionari delle seguenti funzioni.

(a) $a(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 30x$

(b) $b(x) = e^x(x^2 - 2x - 1)$

(c) $c(x) = x^2(2 \ln(x) - 1) - 8 \ln^2(x)$

(d) $d(x) = 3 \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + 1$

(e) $e(x) = \frac{x^2-x+4}{x-1}$

3. Si determini se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del Teorema del valore medio nell'intervallo dato. Se sì, si determini il punto c di cui il Teorema garantisce la esistenza.

(a) $a(x) = x^3 - 2x$ nell'intervallo $[0, 1]$;

(b) $b(x) = \sqrt{x+1}$ nell'intervallo $[0, 4]$;

(c) $c(x) = \frac{x^2-x-4}{x-1}$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

4. Si trovi un esempio di una funzione e un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ tale che f sia derivabile in $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$, ma tale che non esista c in $]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$. (Suggerimento: Si guardino le ipotesi del Teorema di Rolle.)

5. Usando il Teorema di Rolle, si dimostri che la funzione f definita per $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ se $x \in]0, 1]$ e $f(0) = 0$, ha infiniti punti stazionari nell'intervallo $[0, 1]$. (Non dimenticare di verificare le ipotesi del Teorema di Rolle!).

6. Siano f e g due funzioni derivabili in un intervallo $]a, b[$. Si dimostri che se $f'(x) = g'(x)$ per ogni x nell'intervallo $]a, b[$, allora abbiamo che la differenza fra le due funzioni è costante, cioè, $f(x) = g(x) + k$.

7. Per ogni delle seguenti funzioni, si determini il suo dominio, i suoi punti stazionari, gli intervalli dove sono strettamente crescenti o strettamente decrescenti. Per ogni punto stazionario si indichi se si può concludere se è un massimo relativo o minimo relativo.

(a) $a(x) = 3x^2 - 5x + 7$

(b) $b(x) = \frac{x^2 - 7x + 7}{x^2 - 3x + 3}$

(c) $c(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4x + 4}$

(d) $d(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$

(e) $e(x) = x \ln(x - 1)$

(f) $f(x) = x + \frac{10}{x-1} + 3 \ln(x - 1)$

(g) $g(x) = e^{2x^3 - 21x^2 + 60x + 1}$