

Domanda	1a)	1b)	1c)	1d)	1e)	2a)	2b)	2c)	3	Totale
Punti										

Test diagnostico MATEMATICA 2 (04/04/2019)

Corso di Laurea in Chimica, Università di Studi di Cagliari

Questo Test diagnostico serve per un lavoro di autovalutazione e per dare una indicazione delle difficoltà sui contenuti del corso. La durata di questo test è **30 minuti**. La correzione viene fatta collettivamente subito dopo, e le domande sono fatte in tale modo che questa sia veloce. Le metodologie/giustificazioni non vengono valutate in questo test ma, ovviamente, **lo saranno nel esame!**

1. Si determini se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- (a) **(2 punti)** Se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, allora esiste $N < 0$ tale che per ogni x nel intervallo $] -\infty, N[$ abbiamo che $f(x) > 1000$.
- (b) **(2 punti)** Se f è continua in un punto c del suo dominio, allora i limiti laterali di f per x tendente a c coincidono.
- (c) **(2 punti)** Se f, g e h sono funzioni definite in un intervallo $]a, b[$ di $\mathbb{R}$, se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per ogni x in $]a, b[$ e se f e h sono funzioni continue, allora g è anche continua.
- (d) **(2 punti)** Se f è una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e il prodotto $f(a) \cdot f(b)$ è uguale a -1 , allora esiste c nel intervallo $]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.
- (e) **(2 punti)** Se f è continua in ogni punto del suo dominio, allora non esiste nessun punto c nel dominio di f tale che $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$.

2. Si calcolino i seguenti limiti:

(a) **(5 punti)** $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x}$

(b) **(5 punti)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

(c) **(5 punti)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$

3. **(5 punti)** Sia f la funzione definita in $\mathbb{R}$ tale che $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{\ln(x)} & \text{se } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Si scelga la affermazione corretta.

- (a) La funzione f è continua in $\mathbb{R}$.
- (b) I punti $x = 0$ e $x = 1$ sono punti di discontinuità di f .
- (c) Il punto $x = 0$ è l'unico punto di discontinuità di f .
- (d) Il punto $x = 1$ è l'unico punto di discontinuità di f .

Soluzioni (con giustificazioni)

1. (a) **Vera:** Dalla definizione di limite infinito per x tendente a $-\infty$, se scegliamo $M = 1000$, esiste $N < 0$ tale che $f(x) > M$ per ogni x minore di N , cioè, per ogni x in $] -\infty, N[$.
- (b) **Vera:** Se f è continua in un punto c del suo dominio, per definizione di continuità il limite per x tendente a c di f è $f(c)$ e, quindi, i limiti laterali devono coincidere (con $f(c)$).
- (c) **Falsa:** Per esempio, possiamo prender $f(x) = -10$ e $h(x) = 10$ funzioni costanti nell'intervallo $[-1, 1]$. Chiaramente la funzione parte intera $g(x) = \lfloor x \rfloor$ soddisfa $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in quell'intervallo ma $g(x)$ non è continua in $x = 0$, per esempio.
- (d) **Vera:** Se il prodotto $f(a)f(b)$ è negativo, allora $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni diversi. Quindi, siccome f è continua nell'intervallo $[a, b]$, il Teorema degli zeri garantisce la esistenza di c in $]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.
- (e) **Vera:** Se f è continua in ogni punto del suo dominio, allora il limite richiesto coincide sempre con il valore della funzione in quel punto (e quindi non è infinito).

2. (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$:

Questo può essere giustificato per il teorema delle operazioni sui limiti. Siccome $1 - x$ tende per 0^+ quando x tende per 1^- , concludiamo che il limite da calcolare è $+\infty$.

- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \frac{1}{4}$:

Per calcolare questo limite, fattorizziamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} \end{aligned}$$

Siccome la funzione $\sqrt{x}$ è continua nel punto $x = 1$, $\sqrt{x} + 1$ è anche continua perchè è la somma di due funzioni continue (funzioni costanti sono continue). Anche la funzione polinomiale $x + 1$ è continua nel punto $x = 1$ e, quindi, il prodotto $(x + 1)(\sqrt{x} + 1)$ è continua nel punto $x = 1$. Siccome il valore di questo prodotto non è zero in $x = 1$ allora la funzione $\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}$ è continua nel punto $x = 1$ e, quindi, il limite che dobbiamo calcolare coincide con la valutazione di quella funzione nel punto $x = 1$, cioè

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}$$

- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5$:

Per calcolare questo limite facciamo un cambio di variabile $y = 5x$ (e, quindi, $x = \frac{y}{5}$). Si osservi che $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$. Quindi, abbiamo per il teorema del cambio di variabile che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{\frac{y}{5}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5 \sin(y)}{y}$$

Adesso per il teorema delle operazioni sui limiti, abbiamo che

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5 \sin(y)}{y} = 5 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y}$$

e, siccome $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$, concludiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5.$$

3. La affermazione corretta è la (d). Siccome $\ln(x)$ è una funzione continua nel punto $x = 1$, abbiamo in particolare che $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0^-$. Quindi per il teorema delle operazioni sui limiti, abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln(x)} = -\infty$, e quindi il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità della seconda specie per la funzione f . Vediamo che $\frac{1}{\ln(x)}$ è continua nel punto $x = 0$. Infatti, siccome $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ il teorema delle operazioni sui limiti ci dice che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Quindi, f è continua a nel punto 0.