

Esercizi per il Corso di MATEMATICA 2

Foglio 4

22 marzo 2019

1. Si usi il teorema degli zeri o il teorema del valore intermedio per dimostrare che:
 - (a) L'equazione $x^3 + 2x = -1$ ha almeno una soluzione nel intervallo aperto $] - 2, 2[$;
 - (b) L'equazione $\ln(x) = \sin(x)$ ha almeno una soluzione nel intervallo aperto $]0, \pi[$ (si ricordi che $\pi/2 < e < \pi$);
 - (c) L'equazione $e^{x^2-1} + x^n = 1$ ha almeno una soluzione, per qualsiasi $n \geq 1$.
2. Le ipotesi del teorema di Weierstrass sono tutte fondamentali. Si trovino esempi di:
 - (a) una funzione continua f in un intervallo aperto I tale che non esista un massimo assoluto di f in I ;
 - (b) una funzione continua g in un intervallo aperto J tale che non esista un minimo assoluto di f in J ;
 - (c) una funzione continua h in un intervallo aperto e limitato (cioè, della forma $]a, b[$, con $a < b$ numeri reali) K tale che non esista ne massimo assoluto ne minimo assoluto di f in $]a, b[$.

Si giustifichino dettagliatamente tutte le risposte.
3. Si consideri la funzione $f: [\sqrt{2}, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x$ se x è razionale (cioè, appartiene a $\mathbb{Q}$) e $f(x) = 0$ se x è irrazionale.
 - (a) La funzione f ha un minimo assoluto nel intervallo $[\sqrt{2}, \pi]$? Si giustifichi la risposta.
 - (b) La funzione f ha un massimo assoluto nel intervallo $[\sqrt{2}, \pi]$? Si giustifichi la risposta.
 - (c) Secondo il Teorema di Weierstrass, cosa si può concludere sulla continuità della funzione f nel'intervallo $[\sqrt{2}, \pi]$?
4. Servendosi della definizione di derivata di una funzione ad un punto, si calcolino (se esistono):
 - (a) La derivata della funzione $a(x) = \sin(x)$ nel punto $x = 0$;
 - (b) La derivata della funzione $b(x) = \ln(x)$ nel punto $x = 1$;
 - (c) La derivata della funzione $c(x) = e^x$ nel punto $x = 0$;
 - (d) La derivata della funzione $d(x) = \sqrt{x}$ nel punto $x = 4$;
 - (e) La derivata della funzione $e(x) = \frac{1}{x}$ nel punto $x = 2$.
 - (f) La derivata della funzione $f(x) = |x - 3| + 1$ nel punto $x = 3$