

## Esercizi per il Corso di MATEMATICA 2

### Foglio 3

22 marzo 2019

1. Sia  $f$  una funzione definita in  $\mathbb{R}$  tale che

- $f(x) = ax - 1$  se  $x < -1$ ;
- $f(x) = ax^2 + b$  se  $-1 \leq x \leq 1$ ;
- $f(x) = 2x - b$  se  $x > 1$ ;

dove  $a$  e  $b$  sono numeri reali. Si determinino  $a$  e  $b$  in tale modo che la funzione  $f$  sia continua in ogni punto di  $\mathbb{R}$ .

2. Sia  $f$  una funzione definita nell'intervallo  $[0, +\infty[$  tale che

- $f(x) = \alpha$  se  $x = 0$ ;
- $f(x) = \beta$  se  $x = 1$ ;
- $f(x) = \frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)}$  se  $x > 0$  e  $x \neq 1$ .

Si determinino i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  in tale modo che la funzione  $f$  sia continua nell'intervallo  $[0, +\infty[$ .

3. Si consideri la funzione  $f(x) = \lfloor \sin(x) \rfloor$  definita nel intervallo aperto  $] -\pi, \pi[$ .

- (a) In quali punti  $c$  del suo dominio (cioè, dell'intervallo  $] -\pi, \pi[$ ) abbiamo che  $f$  è continua? Si giustifichi la risposta.
- (b) Si trovino tutti i punti di discontinuità di  $f$  nell'intervallo  $] -\pi, \pi[$ .
- (c) Per ogni punto di discontinuità si determini se è di prima, seconda o terza specie.

4. Si calcolino i seguenti limiti e si giustifichino tutte le risposte, usando se necessario limiti già calcolati, argomenti di continuità, operazioni sui limiti o cambi di variabile.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan(x)}{x}$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)}$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\tan x}$
- (d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sin(x^2 - 9)}$
- (e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x}\right)$
- (f)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x)(1 - \sin(x))$
- (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^3 - 8}{x}$
- (h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2}$
- (i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sin(x)}{2x-\sin(x)}$
- (j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$
- (k)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 3}$
- (l)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x+2}$

- (m)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
- (n)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
- (o)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$
- (p)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5+5x^3-1}{-7x^5-3}$
- (q)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{x^7-20}$
- (r)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x, b \in \mathbb{R}$
- (s)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$
- (t)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
- (u)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
- (v)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x}$

5. (Permanenza del segno per funzioni continue) Sia  $f$  una funzione continua in un punto  $c$  del suo dominio. Si dimostri che se  $f(c) < 0$ , allora esiste un intervallo aperto  $]c - \delta, c + \delta[$  tale che  $f(x) < 0$  per qualsiasi punto dell'intervallo.