Corso di Statistica

francesco mola

principali variabili casuali continue

Sommario

Principali distribuzioni continue

Uniforme (rettangolare)

Normale

T di Student

χ^2

Distribuzione Uniforme (Continua)

Rettangolare $X \sim U(a,b)$

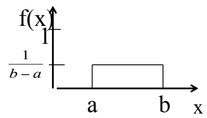
1) Può assumere valori solo nell'intervallo[a,b]

2) A sottoinsiemi [a,b] di uguale ampiezza corrispondono uguali probabilità

La funzione di U è una costante

Funzione di densità

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \text{costante}$$



$$E(X) = \frac{(b+a)}{2} \qquad VAR(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

V.C. Normale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

E' una v.c. continua che assume valori tra $-\infty$ e $+\infty$

E' funzione di due parametri μ, σ^2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La f(x) è sempre non negativa

Indipendentemente dai valori μ e σ^2 si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

se $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$

f(x) è simmetrica rispetto a $x = \mu$

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$, si ha che $\quad f(\mu - x) = f(\mu + x)$

$$E(X) = \boxed{\mu} \qquad VAR(X) = \boxed{\sigma^2}$$

V.C. Normale Standardizzata

Se $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1 \Rightarrow N(\mu, \sigma^2) = Z(0,1)$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty \leq z \leq +\infty$$

Relazione tra $N(\mu, \sigma^2)$ e $Z(0,1)$

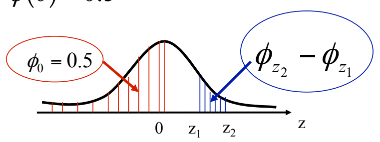
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad X = \mu + Z\sigma$$

$$P(Z < z) = \phi(z) = \int_{-\infty}^{z} f(y)dy$$

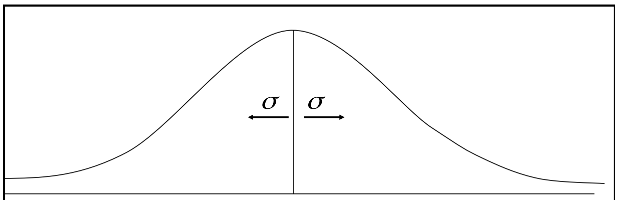
$\exists$ Le tavole!!

$$\phi(z) = 1 - \phi(-z) \Rightarrow \phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

$$\phi(0) = 0.5$$



$$P(X \leq x) = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right] = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$



$M_e = M_0 = \mu$

1) Se $\sigma \uparrow$ la curva si appiattisce

Se $\sigma \downarrow$ la curva si allunga

2) $M_e \equiv M_0 \equiv \mu$

3) $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ sono due flessi

4) $f(\mu - x) = f(\mu + x)$

5) L'intervallo $\mu - \frac{2}{3}\sigma, \mu + \frac{2}{3}\sigma$ comprende il 50% delle osservazioni

L'intervallo $\mu - \sigma, \mu + \sigma$ comprende il 68% delle osservazioni

L'intervallo $\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma$ comprende il 95% delle osservazioni

L'intervallo $\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma$ comprende il 99.7% delle osservazioni

6) Per $x = \mu \Rightarrow f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2}} = \max$

7)Per $x \longrightarrow +\infty$ e $x \longrightarrow -\infty$ $f(x) = 0$

8) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

con a,b costanti reali.

Cioè ogni trasformazione lineare di X sarà ancora Normale

9) Date n v.c. indipendenti $X_1, \ldots X_i, \ldots X_n$ con $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)\; i = 1,2\ldots n$

si dimostra che, date n costanti a_i $i = 1,2\ldots n$ e

$Y = a_1X_1 + \ldots a_nX_n$ si ha:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i \qquad VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2$$

con

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$$

Proprietà riproduttiva della Normale

La v.c. Binomiale può essere approssimata ad una Normale se $npq \geq 10$

Regola pratica

$$P(a \leq x \leq b) \approx \phi\left[\left(\frac{b-np+0.5}{\sqrt{npq}}\right)\right] - \phi\left[\left(\frac{a-np-0.5}{\sqrt{npq}}\right)\right]$$

cioè

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \phi\left[\left(\frac{x-np+0.5}{\sqrt{npq}}\right)\right] - \phi\left[\left(\frac{x-np-0.5}{\sqrt{npq}}\right)\right]$$

Si risolve in questo modo il problema della continuità

28/04/15

Se $\lambda \geq 10$ la v.c. di Poisson è approssimata ad una Normale

$$P(a \leq x \leq b) = \phi\left[\left(\frac{b-\lambda+0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)\right] - \phi\left[\left(\frac{a-\lambda-0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]$$

28/04/15

Variabile Casuale χ^2

Date r v.c. $Z_i \sim N(0,1)$ e indipendenti, si definisce v.c.

$\chi_{(r)}^2$ con r gradi di libertà (g.l.), la v.c.:

$$\chi_{(r)}^2 = \sum_{i=1}^{r} Z_i^2$$

28/04/15

$$E(X) = \mu = r$$

$$VAR(X) = \sigma^2 = 2r$$

$$\text{se } r \uparrow \Rightarrow \chi_{(r)}^2 \sim Normale$$

già con $r \geq 30$

g.l.= gradi di libertà = numero di osservazioni indipendenti del campione meno il numero k di parametri della popolazione che devono essere stimati per mezzo delle osservazioni campionarie

28/04/15

Variabile Casuale T di Student $X \sim T_{(r)}$

Siano date due v.c. $Z \sim N(0,1)$ e $V \sim \chi^2_{(r)}$

allora:

$$T_{(r)} = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2 / r}}$$

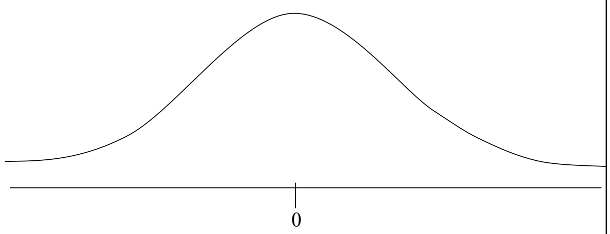
$E(X) = \mu = 0$ (r>1)

$VAR(X) = \sigma^2 = \dfrac{r}{r-2}$ (r>2)

28/04/15

E' una v.c. simmetrica

Con $r \geq 30 \Rightarrow T_r \sim N$



28/04/15