9. TRASFORMATE INTEGRALI

- IN MOLTE AREE DELLA FISICA SI INCONTRANO FUNZIONI $g(\omega)$ DEFINITE COME

$$g(\omega) = \int_a^b f(x)\, K(\omega, x)\, dx \qquad (9.1)$$

$g(\omega)$ SI CHIAMA **TRASFORMATA INTEGRALE** DI $f(x)$. $K(\omega, x)$ È IL **KERNEL**

UNA TRASFORMATA INTEGRALE PUÒ ESSERE PENSATA ANCHE COME UNA CORRISPONDENZA TRA FUNZIONI DEFINITE NELLO **SPAZIO-x** E FUNZIONI DEFINITE NELLO **SPAZIO ω**

ESEMPIO (1): IN ELETTRONICA POSSIAMO CONSIDERARE UN SEGNALE DIPENDENTE DAL TEMPO $f(t)$ (NELLO SPAZIO DEI TEMPI) E LA SUA TRASFORMATA NELLO SPAZIO ω DELLE FREQUENZE

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

ESEMPIO 2): IN MECCANICA QUANTISTICA LA FUNZIONE D'ONDA $\psi(x)$ NELLA RAPPRESENTAZIONE (SPAZIO) DELLE x È LEGATA ALLA FUNZIONE D'ONDA $\psi(p)$ NELLA RAPPRESENTAZIONE (SPAZIO) DEGLI IMPULSI DALLA TRASFORMATA

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-i\frac{px}{\hbar}}\, dx$$

- POSSIAMO DEFINIRE UNA TRASFORMATA INTEGRALE COME UN OPERATORE $\mathcal{L}$

$$g(\omega) \doteq \mathcal{L}[f(x)]$$

- LA TRASFORMATA SI DIRÀ $\boxed{\text{LINEARE}}$ SE $\mathcal{L}$ È UN OPERATORE LINEARE

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{L} f_1 + c_2 \mathcal{L} f_2$$

EQUIVALE A:

$$\int [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]\, K(\omega,t)\, dt = c_1 \int f_1(t) K(\omega,t)\, dt + c_2 \int f_2(t) K(\omega,t)\, dt \qquad (9.2)$$

ESEMPIO 2): IN MECCANICA QUANTISTICA LA FUNZIONE D'ONDA $\psi(x)$ NELLA RAPPRESENTAZIONE (SPAZIO) DELLE x È LEGATA ALLA FUNZIONE D'ONDA $\psi(p)$ NELLA RAPPRESENTAZIONE (SPAZIO) DEGLI IMPULSI DALLA TRASFORMATA

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-i\frac{px}{\hbar}}\, dx$$

- POSSIAMO DEFINIRE UNA TRASFORMATA INTEGRALE COME UN OPERATORE $\mathcal{L}$

$$g(\omega) \doteq \mathcal{L}\{f(x)\}$$

LA TRASFORMATA SI DIRÀ $\boxed{\text{LINEARE}}$ SE $\mathcal{L}$ È UN OPERATORE LINEARE

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathcal{L} f_1 + c_2 \mathcal{L} f_2$$

EQUIVALE A:

$$\int \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} K(\omega,t)\, dt = c_1 \int f_1(t) K(\omega,t)\, dt + c_2 \int f_2(t) K(\omega,t)\, dt \qquad (9.2)$$

POSSIAMO ANCHE CONSIDERARE SEPARATAMENTE PARTE REALE ED IMMAGINARIA

$$g_c(\omega) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(\omega x) \, dx$$ FUNZIONI PARI

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(\omega x) \, dx$$ FUNZIONI DISPARI

(2) TRASFORMATA DI LAPLACE

$$g(\omega) = \int_0^\infty f(x) \, e^{\omega x} \, dx$$

ALTRI ESEMPI

HANKEL

$$g_n(\omega) = \int_0^\infty f(r) \, r \, \underbrace{J_n(\omega r)}_{\text{FUNZIONI DI BESSEL}} \, dr$$

MELLIN

$$g(\omega) = \int_0^\infty f(x) \, x^{s-1} \, dx$$

TRASFORMATA DI FOURIER

- SAPPIAMO CHE UNA FUNZIONE PERIODICA IN $f(x)$ IN $x \in [-\infty, \infty]$ O NON PERIODICA qdc IN $[-L, L]$ PUÒ ESSERE SVILUPPATA IN SERIE DI FOURIER.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{\sqrt{L}} \cos \frac{m\pi}{L} x + \frac{b_m}{\sqrt{L}} \sin \frac{m\pi}{L} x \right) \quad (9.5)$$

CON

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} \, dx$$

$$b_m = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} \, dx$$

ESPRIMENDO $\cos \frac{m\pi}{L} x$ E $\sin \frac{m\pi}{L} x$ IN FORMA ESPONENZIALE POSSIAMO SCRIVERE LA SERIE NEL CAMPO COMPLESSO

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m u_m(x)$$

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{\frac{i m\pi}{L} x}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{\infty}^{\infty}{}_m \, c_m \, e^{-i \frac{m\pi}{L} x}} \quad (9.6)$$

$$c_0 = \frac{1}{L} a_0$$

$$c_m = \langle u_m | f \rangle = $$

$$= \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} f \, e^{-\frac{i m\pi}{L} x} \, dx$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i\, b_n) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i\, b_n) \qquad n > 0$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} f(x)\, e^{+i\frac{n\pi}{L}x}\, dx \qquad n \gtreqless 0} \qquad (9.7)$$

- FISICAMENTE LO SVILUPPO (9.6) (9.7) RAPPRESENTA LA DECOMPOSIZIONE SPETTRALE (ONDE SINUSOIDALI MONOCROMATICHE) DI UN SEGNALE PERIODICO (O LIMITATO TRA $[-L, L]$

VOGLIAMO GENERALIZZARE LA (9.6) AL CASO DI INTERVALLO INFININITO $x \in [\infty, \infty]$ $L \to \infty$.

USANDO LE (9.6) (9.7) POSSIAMO SCRIVERE

$$f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^{L} e^{+i\frac{n\pi}{L}t} f(t)\, dt \right) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}$$

PONIAMO $\frac{m\pi}{L} = \omega$, $\frac{\pi}{L} = \Delta\omega$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \left(\int_{-L}^{L} e^{+i\omega t} f(t)\, dt \right) e^{-i\omega x}$$

NEL LIMITE $L \to \infty$ LA SOMMATORIA DIVENTA UN INTEGRALE

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t)\, dt} \quad (9.8)$$

- L' INTEGRALE (9.8) PUÒ NON ESISTERE. SI PUÒ MOSTRARE CHE UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L' ESISTENZA DI (9.8) È CHE $f(x)$ SIA ASSOLUTAMENTE SOMMABILE $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx =$ FINITO

- L' INTEGRALE (9.8) SI CHIAMA INTEGRALE (O RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE) DI FOURIER.

ESSO GENERALIZZA AL CASO DELLO **SPETTRO CONTINUO** LA DECOMPOSIZIONE SPETTRALE (9.6) VALIDA NEL CASO DI **SPETTRO DISCRETO**

FISICAMENTE QUESTO SIGNIFICA CHE UN SEGNALE GENERICO PUÒ ESSERE SCRITTO (NELL' INTERVALLO $t \in [-\infty, \infty]$) COME SOVRAPPOSIZIONE CONTINUA DI ONDE SINUSOIDALI MONOCROMATICHE

L' INTEGRALE

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t)\, dt \qquad (9.9)$$

È LA TRASFORMATA DI FOURIER DI $f(t)$

$|C_n|^2$ NEL CASO DISCRETO

FISICAMENTE $|g(\omega)|^2$ AMPIEZZA DEL MODO DI FREQUENZA ω

L' INTEGRALE

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{-i\omega x}\, d\omega \qquad (9.10)$$

È LA TRASFORMATA INVERSA

(O ANTITRASFORMATA) DI FOURIER

• L' EQUAZIONE (9.8) PUÒ ESSERE ANCHE SCRITTA

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega(t-x)} \right\}$$

RICORDANDO LA PROPRIETÀ FONDAMENTALE DELLA FUNZIONE δ DI DIRAC

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, \delta(t-x)$$

TROVIAMO

$$\boxed{\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega(t-x)}}$$

ESISTENZA DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

TEOREMA N° 1

SE $f \in L(\mathbb{R})$ CIOÈ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx =$ FINITO

$\Rightarrow g(\omega)$ LIMITATA

INFATTI

$$\sup |g(\omega)| \leq \sup \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{i\omega x}| dx$$

$$= \sup \int_{-\infty}^{\infty} |f| dx < \infty \quad \text{PER IPOTESI}$$

TEOREMA 2

SE $f(x) \in L(\mathbb{R}) \rightarrow g(\omega) \in C$ (CONTINUA)

CON. SUFF MA NON NECESSARIA

TEOREMA 3

SE $f \in L(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

CIOÈ RISULTA

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f| dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \text{FINITO}$$

ALLORA VALE LA RELAZIONE DI PARSEVAL

$$\| f \|_{L^2} = \| g(\omega) \|_{L^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, |g|^2$$

TEOREMA 4

$f \in L^2$ MA $f \notin L$

NON C'È GARANZIA CHE $\exists \, g(\omega)$

CIOÈ $g(\omega)$ PUÒ ESISTERE O NON ESISTERE

- SE $\nexists \, g(\omega)$ SI PUÒ CERCARE DI DEFINIRE

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

ESISTENZA ANTITRASFORMATA

- IN $L^2(\mathbb{R})$ L'OPERATORE $\mathcal{F}$ È INVERTIBILE $\exists\, \mathcal{F}^{-1}$

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{F}^{-1}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

$$g(\omega) = \mathcal{F}(f(x))$$
$$\hat{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}(g(\omega))$$

SE INOLTRE $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$

ALLORA $\hat{f}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} g(\omega)\, dx$

$\boxed{\text{SOMMARIO}}$

TUTTO OK PER $f \in L^2 \cap L$

ALTRI CASI SI NAVIGA A VISTA!!

EQUAZIONE DI PARSEVAL

$$f \in L^2(-\infty, \infty) \qquad g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

$$\langle f | f \rangle = \sum_m |C_m|^2$$

$$\int_I |f|^2 dx = \sum_m |C_m|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, |g(\omega)|^2$$

SE $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

Più in generale

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \, G(\omega)^* \, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, g^*(t) \, dt$$

$$\langle G | F \rangle_\omega = \langle g | f \rangle_t$$

PRODOTTI SCALARI È LO STESSO NEGLI SPAZI t E ω

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, g^*(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right)$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \, d\omega' F(\omega) \, G^*(\omega') \int dt \, e^{i(\omega' - \omega)}$$

$$= \int d\omega \, d\omega' \, F(\omega) \, G^*(\omega') \, \delta(\omega' - \omega)$$

$$= \int d\omega \, F(\omega) \, G^*(\omega)$$

L' operatore $\mathcal{L}$ può essere CONSIDERATO UN OPERATORE UNITARIO IN $L^2(\mathbb{R})$

$$\langle G|F\rangle_w = \langle g|f\rangle_t$$

$$|F\rangle_w = \mathcal{L}|f\rangle_t$$

$${}_w\langle G| = {}_t\langle g|\mathcal{L}^\dagger$$

$$\langle g|\mathcal{L}^\dagger \mathcal{L}|f\rangle_t = \langle g|f\rangle_t \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{L}^\dagger \mathcal{L} = I}$$

~~[illegible] $\in L$~~

~~NON $\in L^2$~~

CALCOLO DI TRASFORMATE

$$f(t) = e^{-at}\,\theta(t)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{i\omega - a} e^{-at+i\omega t}\Big|_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a-i\omega} \qquad a>0$$

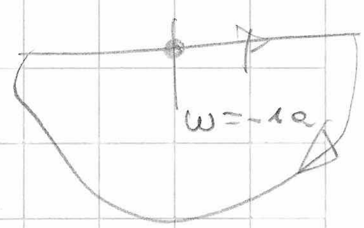
NB. $f(t) \in L(\mathbb{R}) \wedge \in L^2(\mathbb{R})$

$$|g(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a+\omega^2}} \qquad g(\omega) \notin L(\mathbb{R})$$

$\in L^2(\mathbb{R})$

INFATTI $\in L(\mathbb{R})$ COND. SUFF. NON NEC.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{a-i\omega}\, d\omega$$



Lemma di Jordan

$t>0$

$$f(t) = -2\pi i \;\mathrm{Res}\, f\Big|_{\omega=-ia}$$

$$= \frac{-2\pi i}{\sqrt{2\pi}} (\omega+ia) \frac{e^{-i\omega t}}{-i(\omega+ia)}\Big|_{\omega=-ia}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-at}$$

$t<0$

$f(t)=0$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA DERIVATA

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\omega x}\, dx = \mathcal{F}(f(x))$$

$$\mathcal{F}(f'(x)) = (-i\omega)\, g(\omega)$$

Infatti $\quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{-i\omega x}\, d\omega$

$$f'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, (-i\omega)\, e^{-i\omega x}\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f'(x))\, e^{-i\omega x}\, d\omega$$

$$\boxed{\mathcal{F}(f'(x)) = -i\omega\, g(\omega)} \quad (*)$$

ANCHE $\boxed{\frac{d\, g(\omega)}{d\omega} = \mathcal{F}(i x\, f(x))}$

Generalizzando

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(x)) = (-i\omega)^n\, g(\omega)$$

⇒ QUESTA PROPRIETÀ CONSENTE DI RISOLVERE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI TRASFORMANDOLE IN EQUAZ ALGEBRICHE

⇒ UTILE ANCHE PER CALCOLARE TRASF

$$i\, f'(x) = \mathcal{F}^{-1}(\omega\, g(\omega)) =$$

(SI OTTIENE APPLICANDO $\mathcal{F}^{-1}$ ALLA (*))

ANALOGAMENTE

$$\frac{d g(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} +ix \, f(x) \, e^{i\omega x} \, dx$$

$$\frac{d g(\omega)}{d\omega} = \mathcal{F}(ix f(x))$$

$$\frac{d^n g(\omega)}{d\omega^n} = \mathcal{F}((ix)^n f(x))$$

UTILE ANCHE PER CALCOLARE TRASFORMATE

ES. $a > 0$

$$f(t) = \theta(t)\, e^{-at}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a - i\omega}$$

Vogliamo calcolare

$$\mathcal{F}\left(\theta(t)\, t\, e^{-at}\right) = -i \frac{d \hat{f}(\omega)}{d\omega} =$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{a - i\omega}\right) = \frac{1}{(a-i\omega)^2}$$

- PRENDENDO ULTERIORI DERIVATE SI DIMOSTRA LA FORMULA GENERALE

- LA FORMULA (9.14) È MOLTO IMPORTANTE

USANDOLA SI POSSONO TRASFORMARE OPERATORI (EQUAZIONI) DIFFERENZIALI LINEARI IN OPERATORI ALGEBRICI

ESEMPIO:

$$K\phi = \left(\frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx}\right)\phi = \psi(x)$$

PER LA TRASFORMATA DI FOURIER ABBIAMO [$\phi(\omega)$ E $\psi(\omega) \Rightarrow$ TRASFORMATE]

$$\psi(\omega) = (-i\omega)^2\phi(\omega) + 3i\omega\,\phi(\omega)$$

$$= \left[-\omega^2 + 3i\omega\right]\phi(\omega)$$

$$\Downarrow$$

OPERATORE ALGEBRICO

L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

NELLO SPAZIO x

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + 3\frac{d\phi}{dx} = g(x)$$

DIVENTA $\boxed{\text{ALGEBRICA}}$ NELLO SPAZIO ω

$$\left[-\omega^2 + 3i\omega\right]\phi(\omega) = g(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(\omega) = \frac{g(\omega)}{-\omega^2+3i\omega}$$

LA TRASFORMATA DI FOURIER TRASFORMA $\boxed{\text{CONVOLUZIONI}}$ IN PRODOTTI NORMALI

- DEFINIAMO IL PRODOTTO CONVOLUTORIO

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, f(x-y)\, dy$$

INDICANDO CON $F(\omega)$ E $G(\omega)$ LE RISPETTIVE TRASFORMATE ABBIAMO

$$f(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega(x-y)}\, d\omega$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{i\omega y}\, dy$$

SOSTITUENDO

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, f(x-y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)$$

$$\cdot\; e^{-i\omega(x-y)}\, d\omega\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{i\omega y}\, dy \right)$$

$$\cdot\; e^{-i\omega x}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G(\omega)\, e^{-i\omega x}\, d\omega$$

$$\Rightarrow \quad f * g = \mathcal{F}^{-1}\left(F(\omega)\, G(\omega)\right)$$

$\mathcal{F} \Rightarrow$ TRASFORMATA DI FOURIER

$\mathcal{F}^{-1} \Rightarrow$ TRASFORMATA INVERSA

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{F}(f * g) = F(\omega)\, G(\omega)}$$

LA TRASFORMATA DI FOURIER DI UN PRODOTTO CONVOLUTORIO È UGUALE AL PRODOTTO NORMALE DELLE TRASFORMATE DI FOURIER

ALCUNI ESEMPI

(1) RAPPRESENTAZIONE DEGLI IMPULSI IN MECCANICA QUANTISTICA

ABBIAMO VISTO CHE SE $\psi(x)$ È LA FUNZIONE D'ONDA NELLA RAPPRESENTAZIONE DELLE x

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-i\frac{px}{\hbar}}\, dx$$

È LA FUNZIONE D'ONDA NELLA RAPPRESENTAZIONE DEGLI IMPULSI.

ESEMPIO

$$y'' + y = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x \qquad \mathcal{L}[y] = g(\omega)$$

$$\mathcal{L}[y'' + y] = \mathcal{L}[\cos 2x) \qquad h = \mathcal{L}[\cos 2x]$$

SPAZIO ω

$$\left[(-i\omega)^2 + 1\right] g(\omega) = h(\omega)$$

$$\left[1-\omega^2\right] g(\omega) = h(\omega)$$

$$g(\omega) = -\frac{h(\omega)}{\omega^2 - 1}$$

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2} \left(e^{ix(\omega+2)} + e^{ix(\omega-2)} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ix(\omega+2)} + e^{ix(\omega-2)} \right) dx$$

$$= \delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)$$

$$g(\omega) = - \frac{\delta(\omega+1) + \delta(\omega-2)}{\omega^2 - 1}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{[\delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)]}{\omega^2 - 1} d\omega$$

$$= - \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \left[e^{2ix} + e^{-2ix} \right]$$

$$= - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{3} \cos 2x$$

Soluzione generale

$$y = A \sin(x + \delta) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{3} \cos 2x$$

FORZANTE $\cos x$ $\Rightarrow$ RISONANZA

Trasformate di Fourier e Delta di DIRAC in 3D

- DELTA DI DIRAC

$$\delta(\bar{r}-\bar{r}_0) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{K}\cdot(\bar{r}-\bar{r}_0)}\, d^3K$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dK_x\, e^{iK_x(x-x_0)} \left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dK_y\, e^{iK_y(y-y_0)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dK_z\, e^{iK_z(z-z_0)} \quad \ldots$$

- TRASFORMATA DI FOURIER

$\bar{K} = (K_x, K_y, K_z)$

$\bar{r} = (x, y, z)$

$$g(\bar{K}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x\, e^{i\bar{K}\cdot\bar{r}} f(\bar{r})$$

$$f(\bar{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3K\, e^{-i\bar{K}\cdot\bar{r}}\, g(\bar{K})$$

Coordinate polari $f = f(r)$ $g(K)$

$K = |\bar{K}|$

$$f(r,\theta,\varphi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} r^2 dr \int d\varphi \sin\theta\, e^{iK\cos\theta}$$

$f(r)$ $\Rightarrow$ dipende solo da r

$\varphi(K)$ solo K

RELAZIONI DI DISPERSIONE

FUNZIONI DI GREEN

Perturbazione
RISPOSTA
TRASFERIMENTO

$\phi = \hat{G}\phi$

- In fisica sono molto importanti le funzioni di RISPOSTA, CORRELAZIONE, TRASFERIMENTO

che si ottengono quando si sollecita (perturba) un sistema fisico e poi si determina la sua risposta alla sollecitazione

Esempi

- **Elettronica** (Funzione di trasferimento)

Segnale INPUT $a(t)$
Funz. TRASFERIM. $G(t, t')$
OUTPUT $b(t)$

INPUT → [TRASF] → OUT $\quad b(t) = \hat{G}(t,t')\, a(t')$

- **Elettromagnetica**: Materiale Dielettrico soggetto ad un CEM ESTERNO

$P(t) = \chi(t,t')\, E(t')$

INPUT $E(t)$ CEM EST
OUTPUT $P(t)$ POLARI. DIEL.

CAMPO $E(t) \longrightarrow$ POLARIZZAZIONE

χ permeabilità elettrica

- Teoria dei campi: FUNZIONI DI GREEN, PROPAGATORI, CORRELATORI

$\phi(\vec{r}, t) \xrightarrow{\text{DETERMINA}} \phi(\vec{r}', t')$, $t' > t$ $\quad \phi(r, t)$

G PROPAGA IL CAMPO DAL PUNTO di coordinate $(\vec{r}, t)$ al punto $(\vec{r}', t')$

- IN GENERE G dipende dalla dinamica del sistema, ma in generale assumiamo:

(1) LINEARITÀ $b(t)$ funzione lineare di $e(t)$ principio di sovrapposizione OPERATORE G LINEARE

(2) CAUSALITÀ IN - OUT CAUSA-EFFETTO. → segnale out, $e(t)$ determinato da IN e $t' < t$

Per i propagatori in teoria dei campi: Relativistica

se $t > t'$ segnale in (r, t) determinato dai punti r', t' tale che

$$\frac{r - r'}{t - t'} \le c$$

CONO LUCE

- Le funzioni di risposta sono legate al passaggio da EQUAZIONI DIFF. OMOGENEE $\boxed{\text{LINEARI}}$

$\Rightarrow$ EDO (PDE) NON OMOGENEE

TERMINE NON OMOGENEO $\Rightarrow$ FORZANTE

$$Hy = e(t)$$ $\Leftarrow$ FORZANTE O SORGENTE

$H \Rightarrow$ OP. LINEARE - DIFF $H = \frac{d^2}{dt^2} + 1$

ES: $H = \frac{d^2}{dt^2} + 1$

Soluzione può essere ricondotta alla soluzione di

$$\boxed{HG = \delta(t-t')}$$

FORZANTE PUNTUALE

$G \Rightarrow$ FUNZIONE DI RISPOSTA / TRASFERIMENTO

Soluzione della non omogenea è

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')\, e(t')\, dt}$$

Infatti

$$Hy = \int_{-\infty}^{t} (HG)\, e(t')\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')\, e(t')\, dt = e(t)$$

③ Le proprietà del sistema sono invarianti nel tempo

Da queste proprietà segue:

$\boxed{\text{LINEARITA'}}$

- Per $t-t'=\Delta t$ infinitesimo

$$b(t) = G(t;t')\, e(t')$$

per tempi finiti

$$b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')\, e(t')\, dt'$$

$G \rightarrow$ Funzione di Trasferimento
CORRELATORE
PROPAGATORE, FUNZIONE DI GREEN

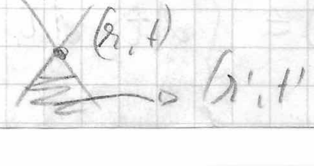
- CAUSALITÀ: OUT al tempo t deve essere determinato solo da IN a $t' < t$

$$b(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t,t')\, e(t')\, dt'$$

NB: Teoria dei campi relativistica più complicato

$$\phi(r,t) = \int d^3r'\, G(r,t,r',t')\, dt'$$

Tale che r', t' è nel PASSATO DEL CONO LUCE DI r, t



③ Invarianza nel tempo

$$G(t,t') = G(t-t')$$

invariante per $t \to t+a$ $t' \to t'+a$

CAMBIANDO VARIABILE $\tau = t - t'$

$$b(t) = \int_0^\infty G(\tau)\, a(t-\tau)\, d\tau \quad *$$

prodotto CONVOLUTORIO

$$\boxed{b = G * a}$$

- TRASFORMATA DI FOURIER TRASFORMA prodotti convolutori in prodotti normali

$$b(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} b(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau$$

$$\boxed{b(\omega) = G(\omega)\, a(\omega)}$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int a(t-\tau)\, e^{i\omega(t-\tau)}\, dt$$

Infatti: prendendo la T. di F. della *

$$\int b(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \int dt\, d\tau\, e^{i\omega t}\, G(\tau)\, a(t-\tau)$$

$t \to t+\tau$

$$b(\omega) = \int dt\, d\tau\, e^{i\omega(t+\tau)}\, G(\tau)\, a(t)$$

$$= \int dt\, e^{i\omega t} e(t) \cdot \int d\tau\, e^{i\omega\tau} G(\tau) = G(\omega)\, e(\omega)$$

Nel caso di un dielettrico

$$P(\omega) = \chi(\omega)\, E(\omega)$$

$$\downarrow_{G(\omega)}$$

Legge di dispersione

Costante dielettrica

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega)$$

Relazione nello spazio fisico nello spazio ω

RELAZIONI DI DISPERSIONE

Legano parte reale e parte immaginaria di $G(\omega)$ $\Rightarrow$ rispettivamente di $\chi(\omega)$

RELAZIONE TRA INDICE DI RIFRAZIONE ED INDICE DI ASSORBIMENTO DI UN MEZZO

- RICAVIAMOLE PER $P(\omega) = \chi(\omega)\, E(\omega)$
  MA HANNO VALIDITÀ GENERALE

$\Rightarrow$ posto $G(\omega) = \chi(\omega) = \chi_R + i\chi_I$ se $P(t)$, $E(t)$, $G(t)$ sono reali

DA $G(\omega) = \int e^{i\omega t} G(t)\, dt$

$$= \int \cos\omega t\, G(t) + i \sin(\omega t)\, G(t) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$$

$\Rightarrow$

$$\chi'(\omega) = \chi'(-\omega) \qquad \chi''(\omega) = -\chi''(-\omega)$$

cioè $\chi(-\omega) = \chi^*(\omega)$

NO se ω è complesso (estensione analitica!)

$\Rightarrow$ $$\chi^*(\omega) = \int e^{-i\omega^* t} G(t)\, dt = \chi(-\omega^*)$$

- ESTENSIONE ANALITICA $\chi \to \chi(\omega)$ $\omega \in \mathbb{C}$
- si può mostrare che $\chi(\omega)$ $\omega \in \mathbb{C}$ è una $\boxed{\text{FUNZIONE OLOMORFA}}$

nel semipiano $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ superiore

Consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{\chi(\omega+\varepsilon) - \chi(\omega)}{\varepsilon} = \int \left(\frac{e^{i\omega t + i\varepsilon t} - e^{i\omega t}}{\varepsilon}\right) G(t)\, dt$$

$$= \int \left(\frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{i\varepsilon t}\right) e^{i\omega t} G(t)\, (it)\, dt \qquad \boxed{\omega = \omega' + i\omega''}$$

NO $$= \int \left(\frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{i\varepsilon t}\right) e^{i\omega' t} (it) e^{-\omega'' t} G(t)\, dt$$

Se ASSUMIAMO $G(t) \in L^2$

Allora per $\omega'' > 0$ onde

$t\, e^{-\omega'' t} G(t)$ è sommabile

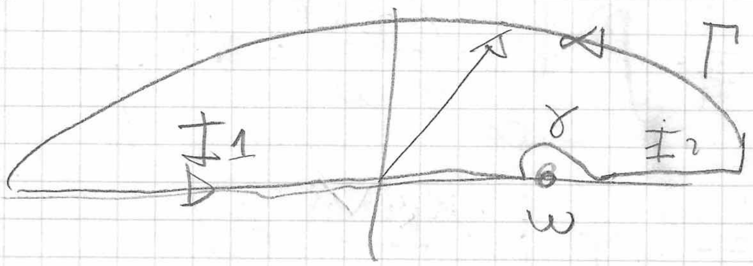
$\Rightarrow \exists \lim_{\varepsilon \to 0} \Rightarrow$ Funzione derivabile $\to$ olomorfa

ASSUMIAMO

- $\chi(\omega)$ è estendibile ANALITICAMENTE su $\mathbb{C}$
- // È OLOMORFA IN $\mathrm{I}(\omega) > 0$

- Possiamo quindi applicare il teorema di Cauchy al semipiano superiore,

$$\oint \frac{x(r)}{r-w}\, dr = 0$$



$$\int_{I_1} \frac{x(r)}{r-w}\, dr + \int_{I_2} \frac{x(r)}{r-w}\, dr + \int_{-\gamma} \frac{x(w)}{r-w}\, dr$$

$$+ \int_{\Gamma} \frac{x(r)}{r-w}\, dr = 0$$

ASSUMIAMO INOLTRE

① Possiamo far coincidere il cammino di integrazione con l'asse reale

② $$\int_{\Gamma} \frac{x(r)}{r-w}\, dr = 0$$

ALLORA

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(r)}{r-w}\, dr = \int_{\gamma} \frac{x(r)}{r-w}\, dr = \pi i \,\mathrm{Res}\, F(r=w)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi i\, x(w)\right)$$

Prendendo PARTE REALE ed Immaginaria

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_R + i\,\chi_I}{\nu - \omega} = \pi \left(i\,\chi_R(\omega) - \chi_I''(\omega) \right)$$

$$\chi_R(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_I(\nu)}{\nu - \omega}\, d\nu$$

$$\chi_I''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int \frac{\chi_R(\nu)}{\nu - \omega}\, d\nu$$

RELAZIONI DI KRAMERS_KRONIG

TORNIAMO A

$$P(\omega) = \chi(\omega) E(\omega)$$

PARTE Reale di $\chi \Rightarrow$ Indice di rifrazione del mezzo n -

parte Im Indice di assorbimento

Infatti:

$$n = n_R + i\, n_I = \sqrt{\varepsilon \mu} = \sqrt{\varepsilon} \qquad \mu \sim 1$$

RIFR. ASS.

$$\varepsilon = \varepsilon_R + i\,\varepsilon_I \qquad \text{per assorbimenti piccoli}$$

$$n = (\varepsilon_R + i\,\varepsilon_I)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\varepsilon_R} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_I}{\sqrt{\varepsilon_R}}\, i = n_R + i\, n_I$$

segue

$$n_R = \sqrt{\varepsilon_R} \qquad n_I = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_I}{n_R}$$

DATO CHE

$$\varepsilon = 1 + 4\pi \chi$$

$$n_R = \sqrt{1 + 4\pi \chi_R} \qquad n_I = \frac{1}{2}\frac{4\pi \chi_I}{\sqrt{1 + 4\pi \chi_R}}$$

Propagazione di un'onda monocromatica (λ_0) nel dielettrico

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

$$\psi = e^{i k_0 (x - vt)}$$

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{n_R} - i \frac{c n_I}{n_R^2}$$

$$\psi = e^{i k_0 x} \, e^{-i \frac{c}{n_R} vt} \, e^{-\frac{k_0 c n_I}{n_R^2} t}$$

Rifrazione   Assorbimento

In genere $n_R(\lambda_0)$ $n_I(\lambda_0)$

onde χ_R, χ_I ...

FENOMENO DELLA DISPERSIONE

o anche $n_R(\omega)$ $n_I(\omega)$

$$\omega = \frac{v}{2\pi\lambda_0}$$

Nota $n_R(\omega) \Rightarrow$ Relazioni di dispersione ci consente di determinare $n_I(\omega)$

ALTRO ESEMPIO

$z = x + iy$

$f(z)$ tale che $\mathrm{Re}\, f(z) = \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, f}{x' - x} dx' \Rightarrow \quad \mathrm{Im}\, f = -\pi \delta(x)$$

Esempio

$$f(z) = \frac{1}{x} - i\pi \delta(x) \quad \left(\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} - i\pi \delta(x) \right)$$

FUNZIONI DI GREEN (PROPAGATORI)

- VI CONSENTE DI TROVARE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE

$$\Delta \varphi(\bar{r}) = 4\pi \rho(\bar{r})$$

SORGENTE

$$\Box \varphi(\bar{r}, t) = 4\pi \rho(\bar{r}, t)$$

NOTA LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

PROPAGATORI

$$\Delta G(\bar{r}-\bar{r}_0) = \delta(\bar{r}-\bar{r}_0)$$

$$\Box G(\bar{r}-\bar{r}_0, t-t_0) = \delta(\bar{r}-\bar{r}_0, t-t_0)$$

$$\varphi(\bar{r}) = 4\pi \int d^3\bar{r}_0 \; G(\bar{r}-\bar{r}_0)\, \rho(\bar{r}_0)$$

$$\varphi(\bar{r}, t) = 4\pi \int dt_0\, d^3\bar{r}_0 \; G(\bar{r}-\bar{r}_0, t-t_0)\, \rho(\bar{r}_0, t_0)$$

$\Downarrow$ POTENZIALI RITARDATI

AVANZATI

PROPAGANO SEGNALE DA $(x=0, t=0)$ a (x, t)

BASTA SOSTITUIRE

$$\Delta \varphi(r) = 4\pi \int d^3 r_0 \; \Delta G(\bar{r}-\bar{r}_0)\, \rho(\bar{r}_0)$$

$$= 4\pi \int d^3 \bar{r}_0 \; \delta(r - r_0)\, \rho(r_0) = 4\pi \rho(\bar{r})$$

ESEMPIO 2D $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$\Box G(x,t) = \delta(x,t)$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int dk\, dk_0 \; g(k,k_0)\, e^{-i(kx - k_0 t)}$$

$$\delta(x,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int e^{-i(kx - k_0 t)}\, dk\, dk_0$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi} \int dk\, dk_0 \; (-ik)^2\, e^{(\;)}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi} \int dk\, dk_0 \; (ik_0)^2\, e^{(\cdots)}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int dk\, dk_0 \left[\left(k_0^2 - k^2\right) g(k,k_0) - \frac{1}{2\pi} \right] e^{-i(kx - k_0 t)}$$

$$= 0$$

PROPAGATORE SPAZIO ω

$$\Rightarrow \quad g(k,k_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k_0^2 - k^2}$$

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_0\, dk \quad e^{-i(kx - k_0 t)}}{k_0^2 - k_2}$$

DIPENDE DAL CAMINO DI INTEGRAZIONE CAUSALITÀ

FUNZIONI DI GREEN RITARDATE

$$G_R(x,t) = \theta(t)\, G(x,t) \quad {=0} \quad t<0$$

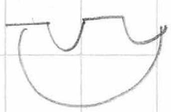
~~PROP~~ SEGNALE ~~UN~~ CHE SI PROPAGA IN AVANTI NEL TEMPO ~~...~~ DA $t=0$ A $t>0$

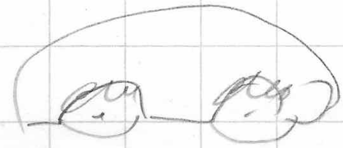
$$G_A(x,t) = \theta(-t)\, G(x,t) \quad {=0} \quad t>0$$

PROPAGA UN SEGNALE DA $t<0$ A $t=0$

$$G_R = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int dk\, e^{-ikx} \int dk_0 \frac{e^{ik_0 t}}{k_0^2 - k^2}$$

$$I = \int_{\gamma_1} \frac{dk_0\, e^{ik_0 t}}{k_0^2 - k^2} = 0 \qquad t<0$$





se $t>0$

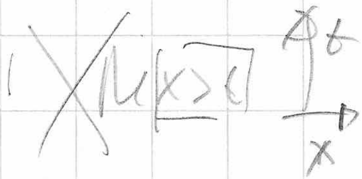
$$I = 2\pi i \sum \mathrm{Res} = 2\pi i \left[\frac{e^{-ikt}}{-2k} + \frac{e^{ikt}}{2k}\right] = 2\pi i \frac{\sin kt}{k}$$

$$G_R(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{-ikx}\, \frac{\sin kt}{k}$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int dk \left(\frac{e^{-ik(x-t)}}{2k} - \frac{e^{-ik(x+t)}}{2k}\right)$$

CONSIDERIAMO SEGNALI $\frac{x}{t} > 1$ $\quad v > c$

$$x - t > 0$$



$$\left\{ \begin{array}{l} d^4x = dt\, dx\, dy\, dz \\ d^4k = dk_0\, dk_x\, dk_y\, dk_z \\ \quad \mu = 0,1,2,3 \end{array} \right.$$

EQ. D'ONDA IN 4D

$$X^\mu = (t, x, y, z)$$

$$k_\mu = (k_0, k_x, k_y, k_z)$$

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$G(\bar{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d^4k\, e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z - k_0 t)}$$

$g(k_\mu)$

$$\mathcal{L}[\Box G] = \left[(-ik_x)^2 + (-ik_y)^2 + (-ik_z)^2 - (-ik_0)^2\right]$$

$$G(k_\mu) = +\left[k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2\right) G(k_\mu)$$

$$= +\left[k_0^2 - \bar{k}^2\right]\ G(k_\mu)$$

$$\mathcal{L}[\delta(\bar{r}, t)] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4$$

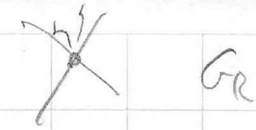
$$+\left[k_0^2 - \bar{k}^2\right]\ G(k_\mu) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2$$

$$\boxed{G(k_\mu) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{k_0^2 - \bar{k}_2}}$$

PROPAGATORE SPAZIO ω

$$G(\bar{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{r} - k_0 t)}}{k_0^2 - \bar{k}^2}\, d^4k$$

PROPAGATORE SPAZIO (x, t)



CALCOLO DIPENDE CAMINO DI INTEGRAZIONE
(CAUSALITÀ)

FUNZIONI DI GREEN RITARDATE G_R

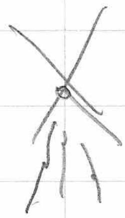
" AVANZATE G_A

$$G_R(\bar{r},t) = \theta(t)\, G(\bar{r},t) \quad = 0 \quad t<0$$

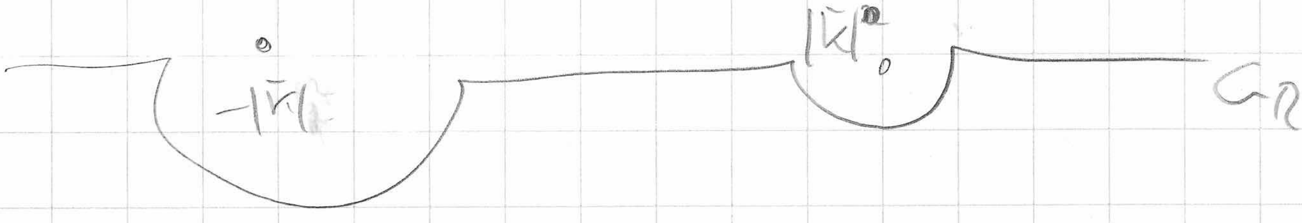
SEGNALE SI PROPAGA AVANTI NEL TEMPO

$$G_A(\bar{r},t) = \theta(t)\, G(\bar{r},t) \quad = 0 \quad t>0$$

SEGNALE SI PROPAGA DA $t<0 \Rightarrow t=0$



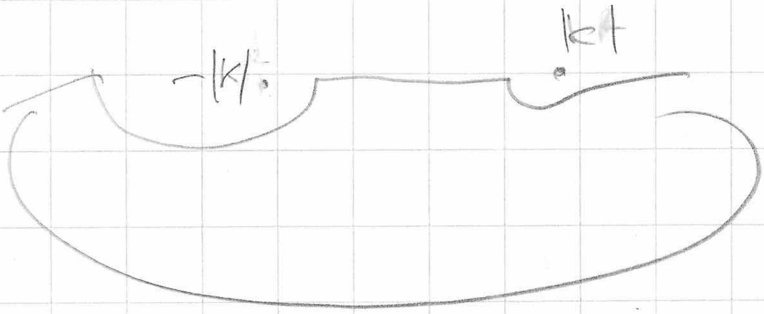
$$k_0 = I\, \bar{k}^2$$



$$G_R = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\bar{k}r}\, d^3\bar{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_0 t}}{k_0^2 - \bar{k}^2}\, dk_0$$

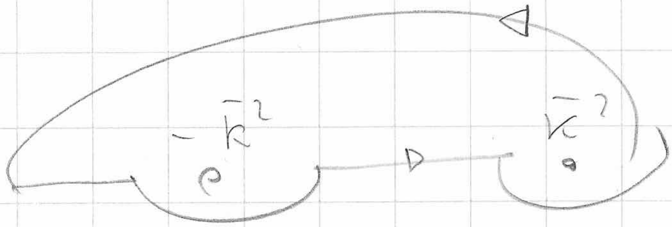
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i k_0 t}}{k_0^2 - \bar{k}^2}\, dk_0$$

$t < 0$



$I = 0$

$t > 0$



$$I = 2\pi i \left(\mathrm{Res}\big|_{-|\bar{k}|} + \mathrm{Res}\big|_{|k|} \right)$$

$$= 2\pi i \left[\frac{e^{i k_0 t}}{(\cancel{k_0+|k|})(k_0-|k|)} (\cancel{k_0+|k|}) \Big|_{-\bar{k}} + \frac{e^{i k_0 t}}{(k_0+|k|)(\cancel{k_0-|k|})} (\cancel{k_0-|k|}) \right)$$

$$= +2\pi i \left[- \frac{e^{-i|k|t}}{2|\bar{k}|} + \frac{e^{i\bar{k}t}}{2|\bar{k}|} \right\} = 2\pi i \, \frac{\sin|k|t}{|k|}$$

$$G_R(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 i \int \frac{e^{-i\bar{k}\bar{r}} \sin|\bar{k}|t}{|k|}\, d^3k$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 i \int dk\, e^{-ikr\cos\theta} \frac{\sin kt}{k}\, d\varphi \sin\theta\, d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 i \int_0^\infty dk \frac{\sin kt}{k} \int_0^\pi e^{ikr\cos\theta} \sin\theta\, d\theta$$

$$= i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty dk \frac{\sin kt}{k} \left(\frac{1}{kr} \left[e^{ikr} - e^{-ikr} \right\} \right)$$

$$= \frac{2i}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\int_0^\infty \frac{\sin kt \sin kr}{k^2}\,dk$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos k(r-t) - \cos k(r+t)\right]$$

$$I = \frac{i}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\int_0^\infty dk\left[\frac{\cos k(r-t)}{k} - \frac{\cos k(r+t)}{k}\right]$$