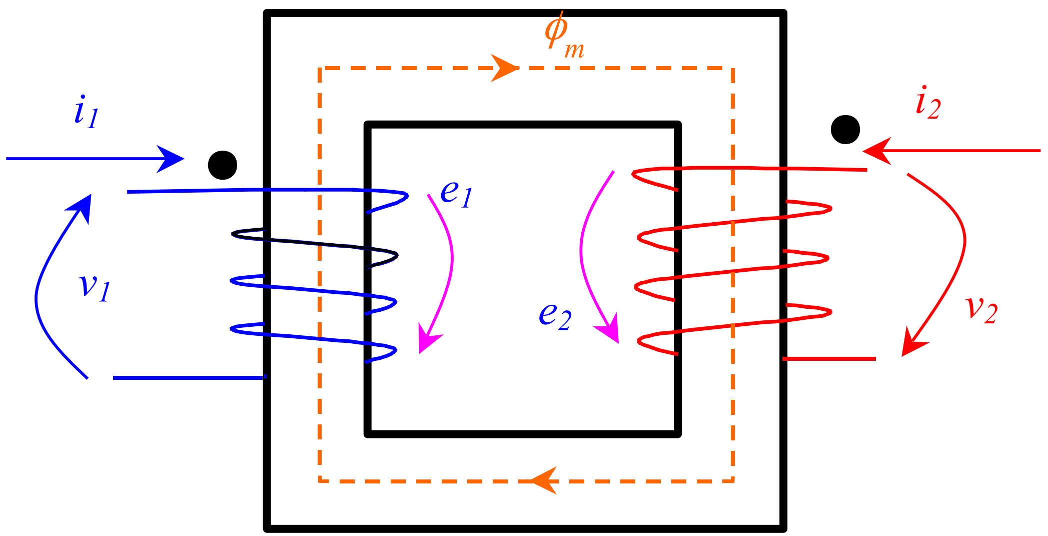
Il Trasformatore ideale



Ipotesi:
Sistema elettrico ideale
$(r_1=r_2=0)$
Sistema magnetico ideale
$\Gamma=\infty$

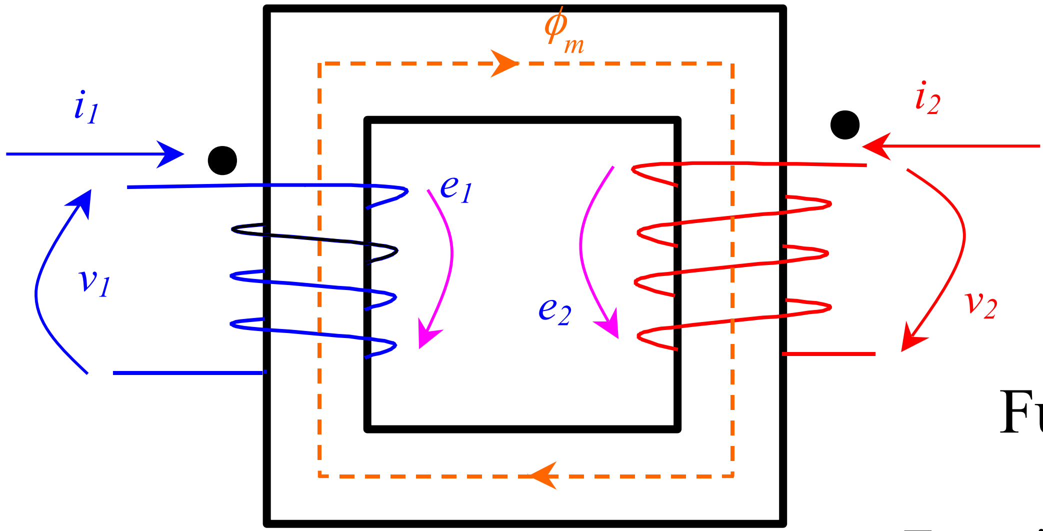
Funzionamento a vuoto

Equazione di equilibrio primaria $\quad v_1 + e_1 = r_1 i_1$

$$v_1 + e_1 = 0; \qquad v_1 = -e_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt};$$

Equazione di equilibrio secondaria $\quad e_2 - v_2 = 0; \qquad v_2 = e_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt};$

Il Trasformatore ideale



Ipotesi:
Sistema elettrico ideale
(r_1=r_2=0)
Sistema magnetico ideale
$\Gamma=\infty \;\Rightarrow\; m=\infty$

Funzionamento sotto carico

Eq. primaria $\quad v_1 = -e_1 = N_1 \dfrac{d\phi}{dt};$

Eq. secondaria $\quad v_2 = e_2 = -N_2 \dfrac{d\phi}{dt};$

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = -\frac{N_1}{N_2} = -k}$$

Analisi del sistema magnetico

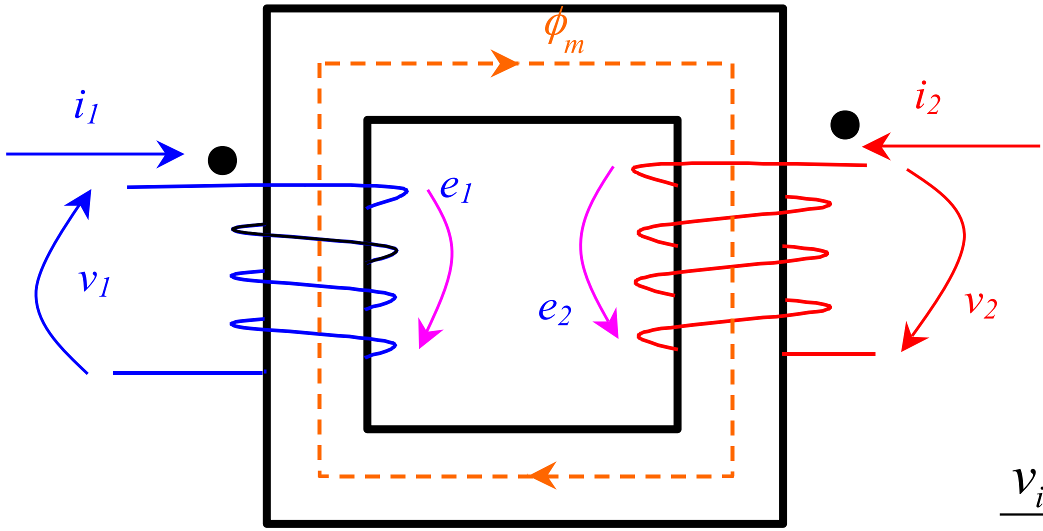
$$\oint_\gamma H \cdot dl = N_1 i_1 + N_2 i_2;$$

$$\phi = B \cdot S;$$

$$B = \mu H \qquad N_1 i_1 = -N_2 i_2;$$

$$\boxed{\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{k}}$$

Il Trasformatore ideale sotto carico



$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{N_1}{N_2} = -k$$

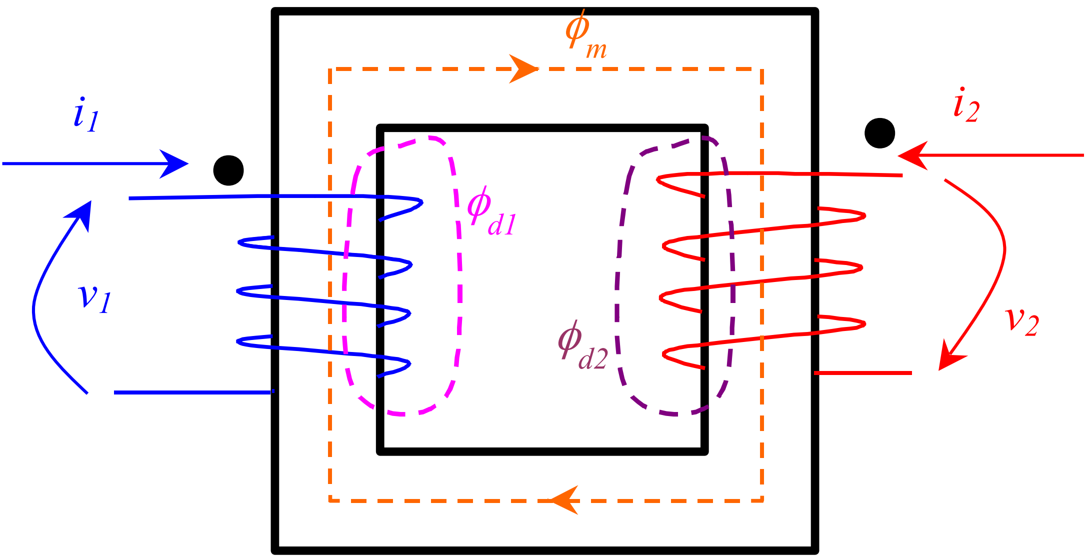
$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{k}$$

$$\frac{v_{in}}{v_{out}} = n \qquad \frac{i_{in}}{i_{out}} = \frac{1}{n} \qquad \frac{v_{in}}{i_{in}} = n^2 \frac{v_{out}}{i_{out}}$$

Analisi Energetica

$$p_1 = v_1 i_1; \quad p_2 = v_2 i_2; \qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{v_1 i_1}{v_2 i_2} = \left(-\frac{N_1}{N_2}\right)\left(-\frac{N_2}{N_1}\right) = 1$$

Il Trasformatore Reale di tipo lineare



Ipotesi:
Sistema magnetico reale
Materiali con comportamento lineare
$\Gamma \neq \infty$

Applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti

$$\phi_1 = \phi_{m1} + \phi_{d1}$$

$$\phi_2 = \phi_{m2} + \phi_{2d}$$

$$\phi_m = \phi_{m1} + \phi_{m2}$$

$$N_1\phi_{m1} = L_1 i_1$$

$$N_2\phi_{m1} = M i_1$$

L_1 coefficiente di autoinduzione principale primario

$$L_1 = \frac{N_1}{N_2} M;$$

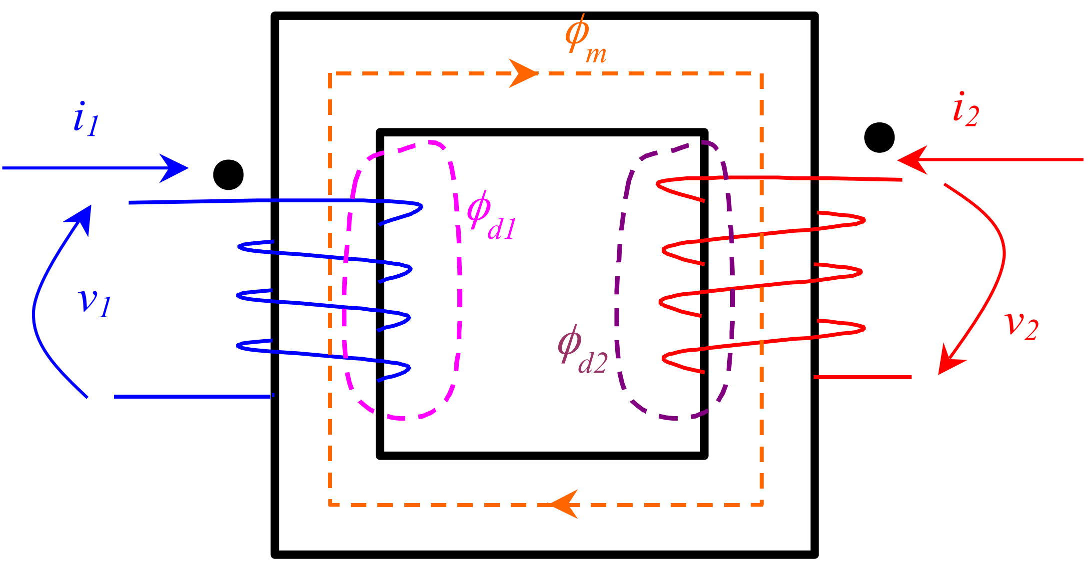
$$N_2\phi_{m2} = L_2 i_2$$

$$N_1\phi_{m2} = M i_2$$

L_2 coefficiente di autoinduzione principale secondario

$$L_2 = \frac{N_2}{N_1} M;$$

Il Trasformatore Reale di tipo lineare



Ipotesi:
Sistema magnetico reale
Materiali con comportamento lineare
$\Gamma \neq \infty$

$$N_1\phi_{d1} = L_{1d}i_1$$

L_{1d} coefficiente di autoinduzione di dispersione primario

$$N_2\phi_{d2} = L_{2d}i_2$$

L_{2d} coefficiente di autoinduzione di dispersione secondario

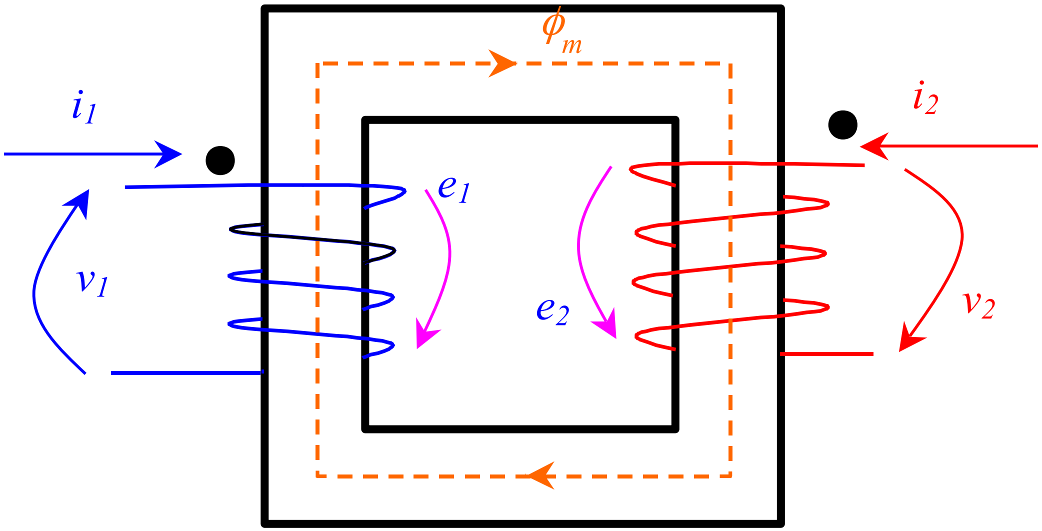
$$\sigma_1 = \frac{L_{1d}}{L_1}; \qquad L_{1t} = (1+\sigma_1)L_1$$

σ_1 Coefficiente di dispersione primario

$$\sigma_2 = \frac{L_{2d}}{L_2}; \qquad L_{2t} = (1+\sigma_2)L_2$$

σ_2 Coefficiente di dispersione secondario

Il Trasformatore Reale di tipo lineare



Ipotesi:
Sistema magnetico reale
Materiali con comportamento lineare
$\Gamma \neq \infty$

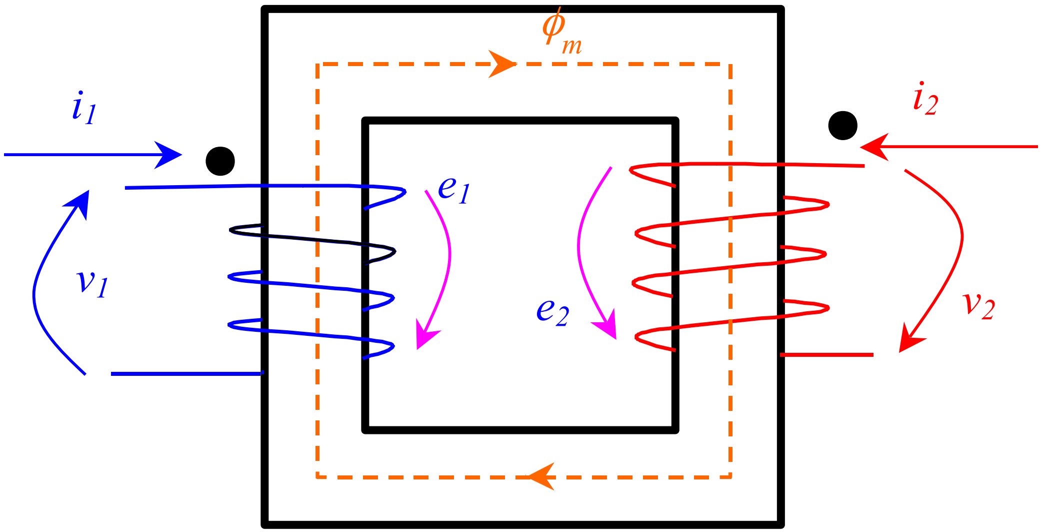
Equazione di equilibrio avv. primario

$$v_1 + e_1 = r_1 i_1$$

$$v_1 = r_1 i_1 + N_1 \frac{d\phi_1}{dt}; \qquad \phi_1 = \frac{L_{1t} i_1}{N_1}$$

$$\boxed{v_1 = r_1 i_1 + L_{1t} \frac{di_1}{dt};}$$

Il Trasformatore Reale di tipo lineare



Ipotesi:
Sistema magnetico reale
Materiali con comportamento lineare
$\Gamma \neq \infty$

Equazione di equilibrio avv. primario

$$\phi_1 = \phi_{1d} + \phi_m;$$

$$v_1 = r_1 i_1 + N_1 \frac{d\phi_{1d}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_m}{dt};$$

$$v_1 = r_1 i_1 + L_{1d} \frac{di_1}{dt} - e_{1m};$$

$$\phi_m = \phi_{m1} + \phi_{m2}$$

$$v_1 = r_1 i_1 + L_{1d} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\phi_{m1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_{m2}}{dt};$$

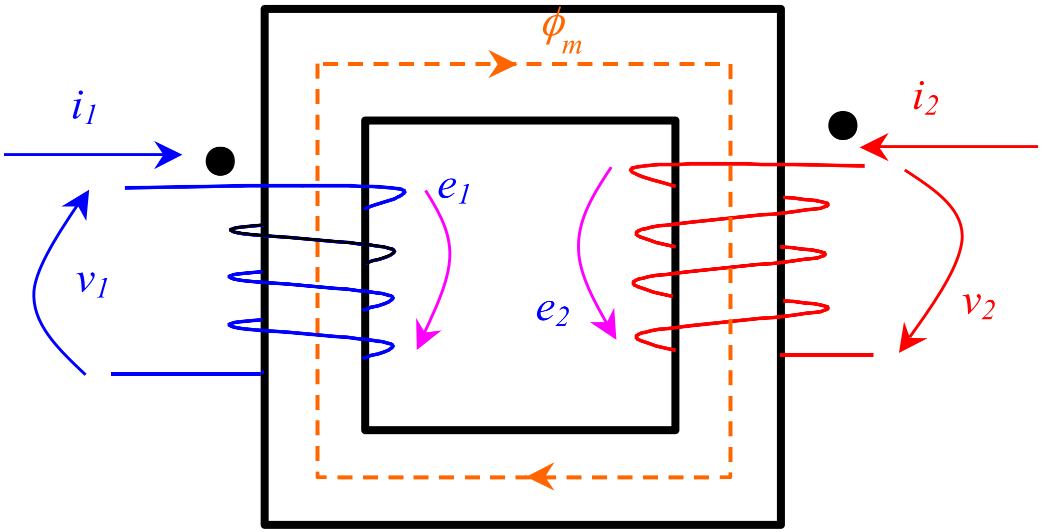
$$v_1 = r_1 i_1 + L_{1d} \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt};$$

$$L_1 = \frac{N_1}{N_2} M;$$

$$v_1 = r_1 i_1 + L_{1d} \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d}{dt}\left(i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2\right)$$

$$v_1 = r_1 i_1 + \sigma_1 L_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d}{dt}\left(i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2\right)$$

Il Trasformatore Reale di tipo lineare



Ipotesi:
Sistema magnetico reale
Materiali con comportamento lineare
$\Gamma \neq \infty$

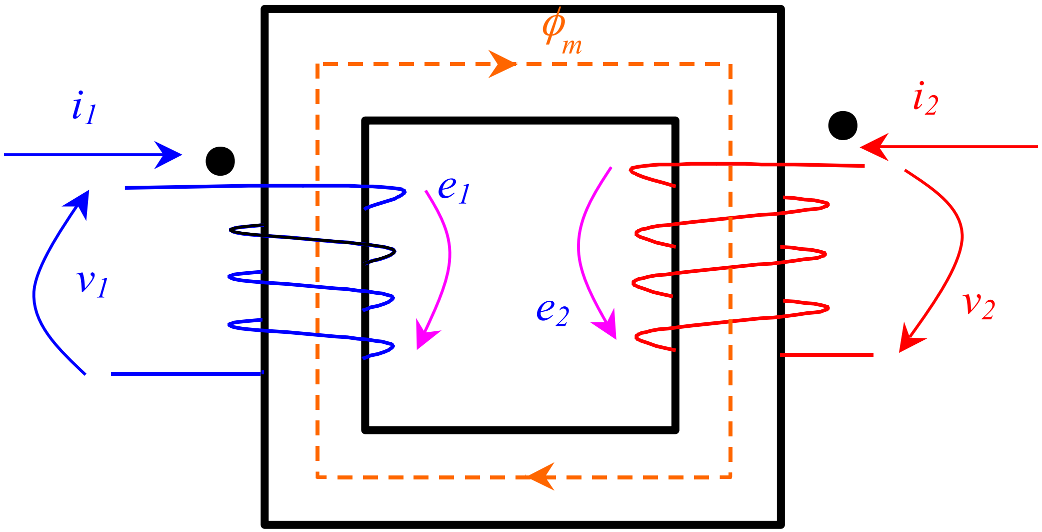
Equazione di equilibrio avv. secondario

$$e_2 = r_2 i_2 + v_2$$

$$-N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = r_2 i_2 + v_2; \qquad \phi_2 = \frac{L_{2t} i_2}{N_2}$$

$$-L_{2t} \frac{di_2}{dt} = r_2 i_2 + v_2;$$

Il Trasformatore Reale di tipo lineare



Ipotesi:
Sistema magnetico reale
Materiali con comportamento lineare
$\Gamma \neq \infty$

Equazione di equilibrio avv. secondario

$$\phi_2 = \phi_{2d} + \phi_m;$$

$$-N_2 \frac{d\phi_m}{dt} = r_2 i_2 + N_2 \frac{d\phi_{2d}}{dt} + v_2;$$

$$e_{2m} = r_2 i_2 + L_{2d} \frac{di_2}{dt} + v_2; \qquad e_{2m} = -N_2 \frac{d\phi_m}{dt};$$

$$\phi_m = \phi_{m1} + \phi_{m2}$$

$$-N_2 \frac{d}{dt}\left(\phi_{m1} + \phi_{m2}\right) = r_2 i_2 + L_{2d} \frac{di_2}{dt} + v_2;$$

$$-M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = r_2 i_2 + L_{2d} \frac{di_2}{dt} + v_2;$$

$$N_2 \phi_{m1} = M i_1 \qquad L_2 = \frac{N_2}{N_1} M;$$

$$-M \frac{d}{dt}\left(i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2\right) = r_2 i_2 + L_{2d} \frac{di_2}{dt} + v_2;$$

Il Trasformatore Reale di tipo lineare

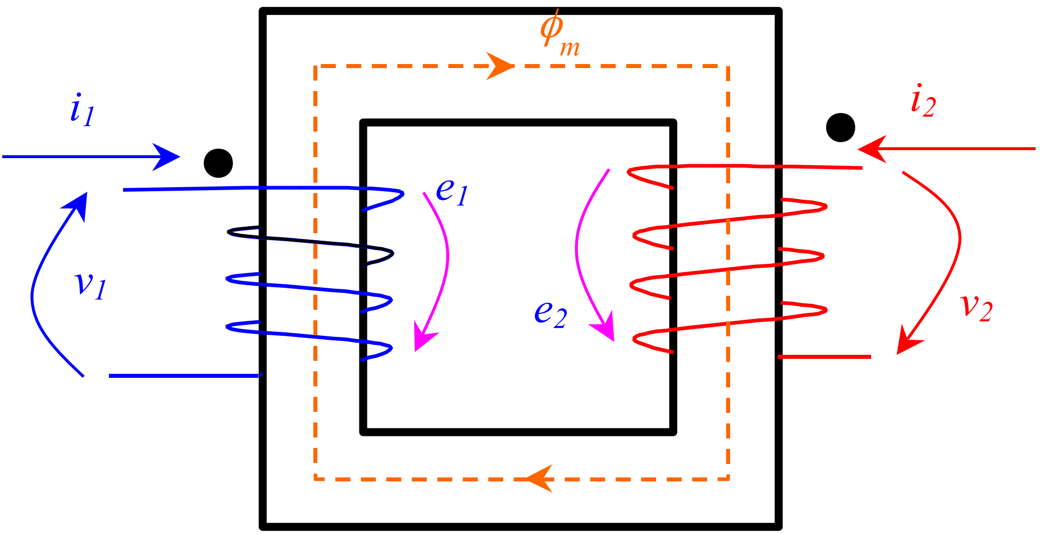
Sistema Magnetico

$$\oint_{\gamma} H \cdot dl = N_1 i_1 + N_2 i_2;$$

$$B_c = \mu H_c; \qquad \phi_m = B_c \cdot S_c;$$

$$H_c = \frac{\phi_m}{S_c \mu}$$

Se si considera un tubo di flusso: ϕ_m è costante



$$\phi_m \oint_{\gamma} \frac{dl}{S_c \mu} = N_1 i_1 + N_2 i_2;$$

$$\phi_m \Re = N_1 i_1 + N_2 i_2;$$

$$\phi_m = \Gamma\left(N_1 i_1 + N_2 i_2\right);$$

Il Trasformatore Reale di tipo lineare

Sistema Magnetico

$$\phi_m = \frac{1}{N_1}\left(L_1 i_1 + M i_2\right);$$

$$\phi_m = \frac{1}{N_2}\left(M i_1 + L_2 i_2\right);$$

$$L_1 = \frac{N_1}{N_2} M; \qquad L_2 = \frac{N_2}{N_1} M;$$

$$\phi_m = \frac{1}{N_1}\left(L_1 i_1 + M i_2\right) = \frac{L_1}{N_1}\left(i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2\right);$$

$$\phi_m = \frac{1}{N_2}\left(M i_1 + L_2 i_2\right) = \frac{M}{N_2}\left(i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2\right);$$

$$\boxed{i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2 = i_{1\mu}}$$

Il Trasformatore Reale di tipo lineare

$$\begin{cases} v_1 = r_1 i_1 + L_{1d}\dfrac{di_1}{dt} + L_1\dfrac{d}{dt}i_{1\mu} \\ -M\dfrac{d}{dt}i_{1\mu} = r_2 i_2 + L_{2d}\dfrac{di_2}{dt} + v_2 \\ i_{1\mu} = i_1 + \dfrac{N_2}{N_1}i_2 = \dfrac{\phi_m \Re}{N_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = r_1 i_1 + L_{1d}\dfrac{di_1}{dt} - e_{1m} \\ e_{2m} = r_2 i_2 + L_{2d}\dfrac{di_2}{dt} + v_2 \\ i_{1\mu} = i_1 + \dfrac{N_2}{N_1}i_2 = \dfrac{\phi_m \Re}{N_1} \end{cases}$$

$$\frac{e_{1m}}{e_{2m}} = \frac{N_1}{N_2};$$

Il Trasformatore Reale di tipo lineare

Riporto eq. Secondaria al primario

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{N_1}{N_2} = -k$$

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{k}$$

$$p_{cu\,2} = r_2 i_2^2 = r_2' i_2'^2$$

$$r_2' i_2'^2 = r_2' \frac{i_2^2}{k^2} \Rightarrow r_2 = \frac{r_2'}{k^2}$$

$$\begin{cases} v_1 = r_1 i_1 + L_{1d}\dfrac{di_1}{dt} + L_1 \dfrac{d}{dt} i_{1\mu} \\ \boxed{-M\dfrac{d}{dt} i_{1\mu} = r_2 i_2 + L_{2d}\dfrac{di_2}{dt} + v_2 \quad \text{Moltiplico per } -k \text{ primo e secondo membro}} \\ i_{1\mu} = i_1 + \dfrac{N_2}{N_1} i_2 = \dfrac{\phi_m \Re}{N_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = r_1 i_1 + L_{1d}\dfrac{di_1}{dt} + L_{1m}\dfrac{d}{dt} i_{1\mu} \\ L_1 \dfrac{d}{dt} i_{1\mu} = -k \cdot r_2 i_2 - k \cdot L_{2d}\dfrac{di_2}{dt} - k \cdot v_2 \\ i_{1\mu} = i_1 + \dfrac{1}{k} i_2 \end{cases}$$

$$i_2 = -k \cdot i_2' \qquad v_2 = -\frac{1}{k} v_2' \qquad k^2 r_2 = r_2'$$

$$\begin{cases} v_1 = r_1 i_1 + L_{1d} \dfrac{di_1}{dt} + L_1 \dfrac{d}{dt} i_{1\mu} \\ L_1 \dfrac{d}{dt} i_{1\mu} = -k \cdot r_2 i_2 - k \cdot L_{2d} \dfrac{di_2}{dt} - k \cdot v_2 \\ i_{1\mu} = i_1 + \dfrac{1}{k} i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = r_1 i_1 + L_{1d} \dfrac{di_1}{dt} + L_1 \dfrac{d}{dt} i_{1\mu} \\ L_1 \dfrac{d}{dt} i_{1\mu} = k^2 \cdot r_2 i_2' + k^2 \cdot L_{2d} \dfrac{di_2'}{dt} + v_2' \\ i_{1\mu} = i_1 - i_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = r_1 i_1 + L_{1d} \dfrac{di_1}{dt} + L_1 \dfrac{d}{dt} i_{1\mu} \\ L_1 \dfrac{d}{dt} i_{1\mu} = r_2' i_2' + L_{2d}' \dfrac{di_2'}{dt} + v_2' \\ i_{1\mu} = i_1 - i_2' \end{cases}$$