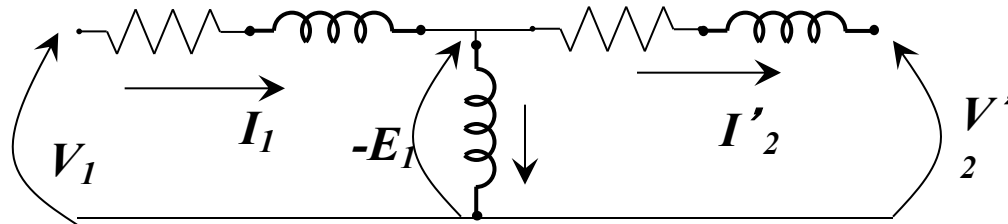


$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = r_1 i_1 + L_{1d} \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d}{dt} i_{1\mu} \\ L_1 \frac{d}{dt} i_{1\mu} = r_2' i_2' + L_{2d}' \frac{di_2'}{dt} + v_2' \\ i_{1\mu} = i_1 - i_2' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = r_1 i_1 + L_{1d} \frac{di_1}{dt} - e_{1m} \\ -e_{1m} = r_2' i_2' + L_{2d}' \frac{di_2'}{dt} + v_2' \\ i_{1\mu} = i_1 - i_2' \end{array} \right.$$



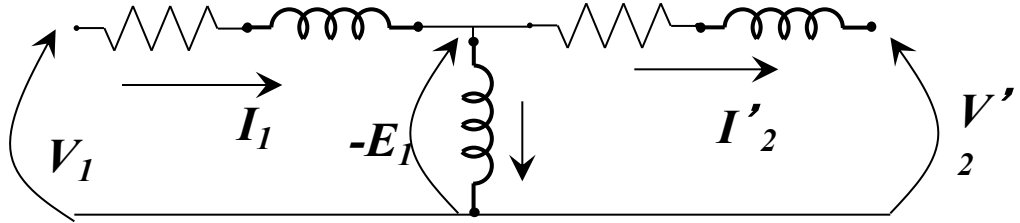
Passando al regime sinusoidale permanente

$$\begin{array}{ll} \bar{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{1d}) \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_{1\mu}; & j\omega L_1 \bar{I}_{1\mu} = (R_2' + j\omega L_{2d}') \bar{I}_2' + \bar{V}_2' \\ \bar{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{1d}) \bar{I}_1 + j\omega N_1 \bar{\Phi}_m; & j\omega L_1 \bar{I}_{1\mu} = \dot{z}'_{d2} \bar{I}_2' + \bar{V}_2' \\ \bar{V}_1 = \dot{z}'_{1d} \bar{I}_1 - \bar{E}_1 & \bar{I}_{1\mu} = \bar{I}_1 - \bar{I}_2' \end{array}$$

$$\bar{V}_1 = \dot{z}_{d1} \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_\mu$$

$$j\omega L_1 \bar{I}_\mu = \dot{z}'_{d2} \bar{I}'_2 + \bar{V}'_2$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_\mu + \bar{I}'_2$$



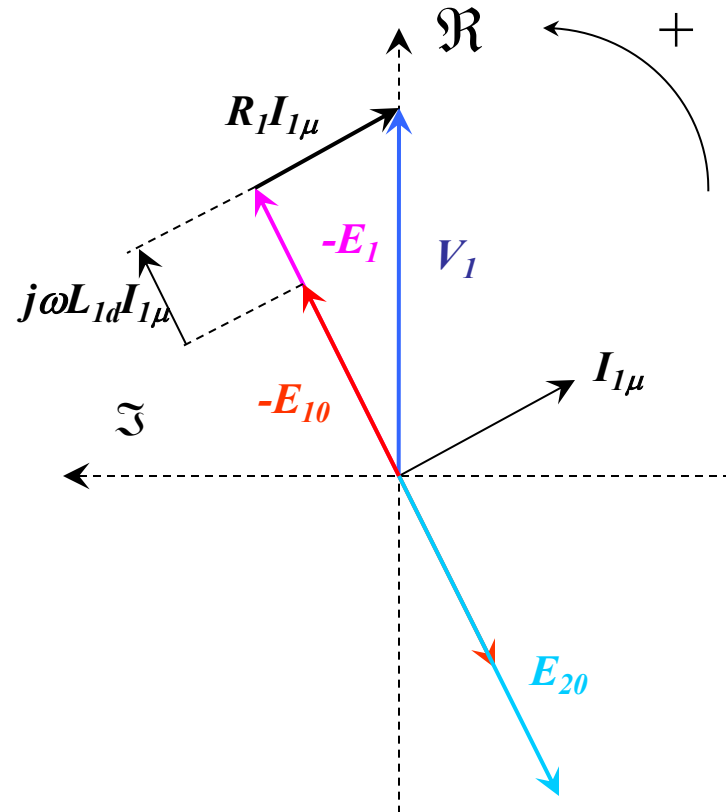
***Funzionamento a vuoto in regime sinusoidale permanente***

***Funzionamento sotto carico in regime sinusoidale permanente***

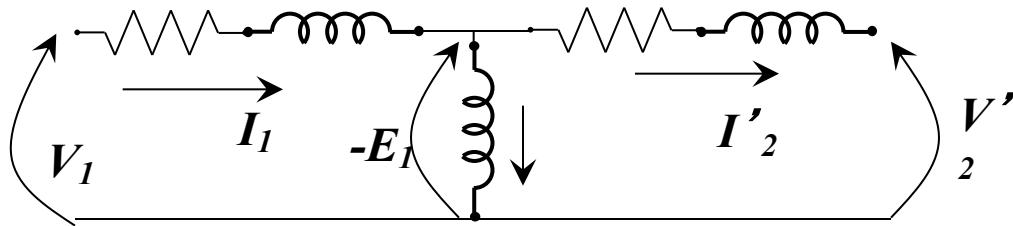
*Funzionamento a vuoto in regime sinusoidale permanente*  
*Diagramma Vettoriale*

$$\bar{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{1d})\bar{I}_{1\mu} - \bar{E}_{10};$$

$$\bar{V}_{20} = \bar{E}_{20} = -j\omega N_2 \bar{\Phi}_{mo}$$



## *Funzionamento sotto carico in regime sinusoidale permanente*

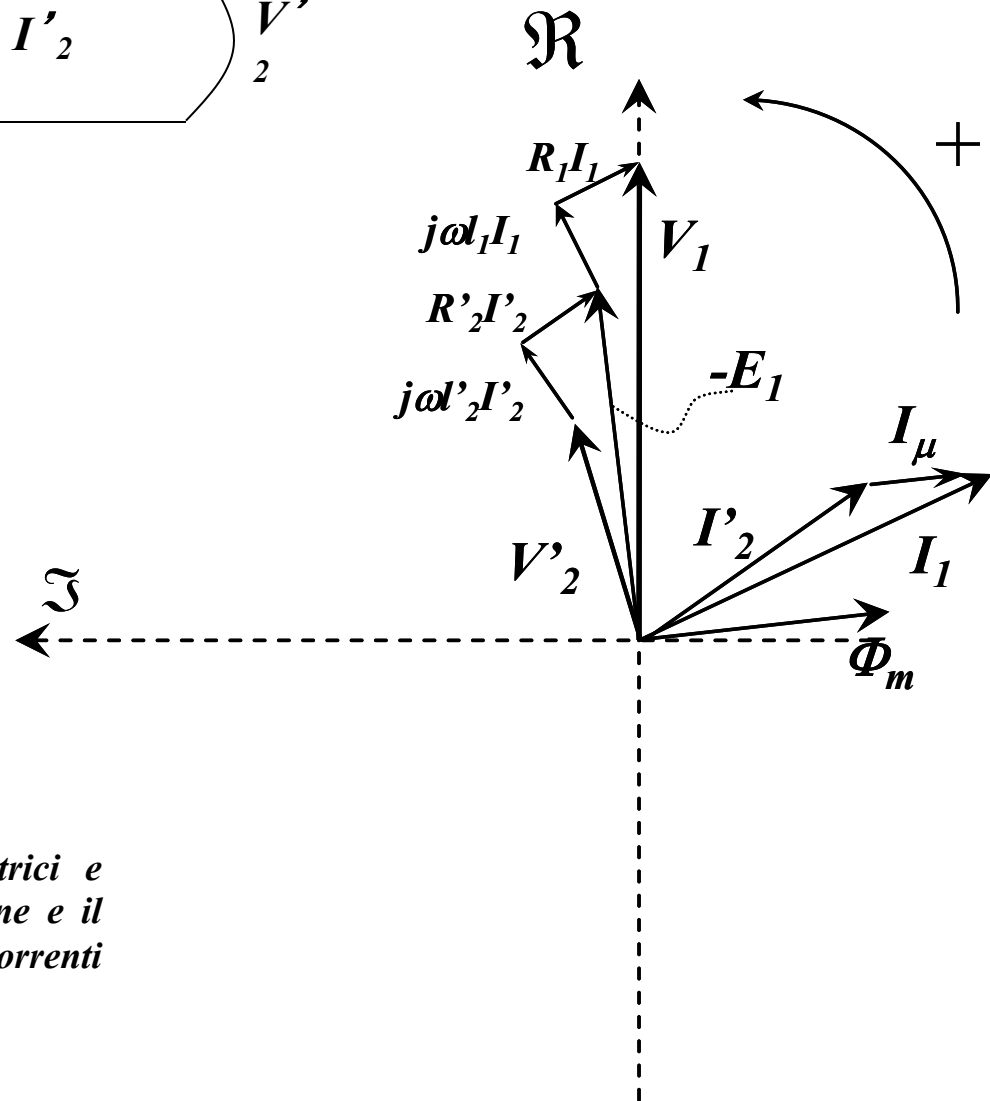


$$\bar{V}_1 = \dot{z}_{d1} \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_\mu$$

$$j\omega L_1 \bar{I}_\mu = \dot{z}'_{d2} \bar{I}'_2 + \bar{V}'_2$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_\mu + \bar{I}'_2$$

$$-\bar{E}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_\mu = j\omega N_1 \phi_m$$



*Se sono noti tutti i parametri elettrici e magnetici, la tensione di alimentazione e il carico possono essere determinate le correnti al primario e al secondario.*

## Trasformatore Monofase

*L'analisi del diagramma vettoriale mette in luce la presenza di una differenza in modulo e fase tra la tensione presente al primario e la tensione presente sul secondario riportata al primario. In un trasformatore ideale tale differenza è nulla.*

*La potenza complessa assorbita dalla macchina è diversa da zero, mentre nella macchina ideale è uguale a zero*

$$\dot{A}_t = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* - \bar{V}_2 \bar{I}_2'^* = (\dot{z}_{d1} \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_\mu) \bar{I}_1^* - (j\omega L_1 \bar{I}_\mu - \dot{z}'_{d2} \bar{I}_2') \bar{I}_2'^*$$

$$\dot{A}_t = (\dot{z}_{d1} \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_\mu) \bar{I}_1^* - (j\omega L_1 \bar{I}_\mu - \dot{z}'_{d2} \bar{I}_2') \bar{I}_2'^*$$

$$\dot{A}_t = \dot{z}_{d1} I_1^2 + \dot{z}'_{d2} I_2'^2 + j\omega L_1 \bar{I}_\mu (\bar{I}_1^* - \bar{I}_2'^*)$$

$$\dot{A}_t = \dot{z}_{d1} I_1^2 + \dot{z}'_{d2} I_2'^2 + j\omega L_1 I_\mu^2$$

$$\Re(\dot{A}_t) = R_1 I_1^2 + R_2' I_2'^2;$$

$$\Im(\dot{A}_t) = \omega (L_{d1} I_1^2 + L_{d1}' I_2'^2 + L_1 I_\mu^2)$$

## *Trasformatore Monofase*

$$\Re(\dot{A}_t) = R_1 I_1^2 + R_2 I_2'^2;$$

$$\Im(\dot{A}_t) = \omega(L_{d1} I_1^2 + L_{d1}' I_2'^2 + L_1 I_\mu^2)$$

*Per minimizzare l'assorbimento di potenza complessa:*

- *Ridurre i valori delle resistenza primarie e secondarie (compatibilmente con i costi di produzione e di esercizio del trasformatore)*
- *Ridurre la il valore della corrente primaria a parità di corrente secondaria richiesta dal carico*
- *Ridurre i coefficienti di autoinduzione di dispersione;*
- *Minimizzare la potenza reattiva associata al flusso di mutuo accoppiamento*

$$Q_m = \omega L_1 I_\mu^2 \quad \phi_m = \frac{L_1}{N_1} I_\mu \quad L_1 = \Gamma N_1^2$$

$$Q_m = \omega \frac{\lambda_{1m}^2}{L_1} = \omega \frac{\phi_{1m}^2}{\Gamma}$$

*Se il valore efficace del flusso di muta e la pulsazione elettrica possono essere considerate costanti, la potenza reattiva può essere minimizzata massimizzando  $\Gamma$*

# *Trasformatore Monofase*

## La massimizzazione della permeanza del circuito magnetico

$$\Gamma = \frac{\mu S}{l};$$

- **Aumentare la sezione delle colonne;**
- **aumentare la permeabilità magnetica assoluta dei materiali costituenti il circuito magnetico;**
- **diminuire la lunghezza dei percorsi seguiti dalle linee di flusso**

**L'entità delle variazioni di permeanza magnetica che possono essere ottenute agendo sulla permeabilità magnetica assoluta del mezzo sono di gran lunga superiori a quelle che si possono ingegneristicamente ottenere agendo sulle dimensioni del circuito stesso.**

# *Trasformatore Monofase*

**I materiali utilizzati per la realizzazione del circuito magneti sono esclusivamente di natura ferromagnetica**

## **Svantaggi:**

- **Incremento delle perdite per effetto dell'isteresi magnetica e delle correnti parassite**
- **caratteristica non lineare-polidromica.**

## **Vantaggi:**

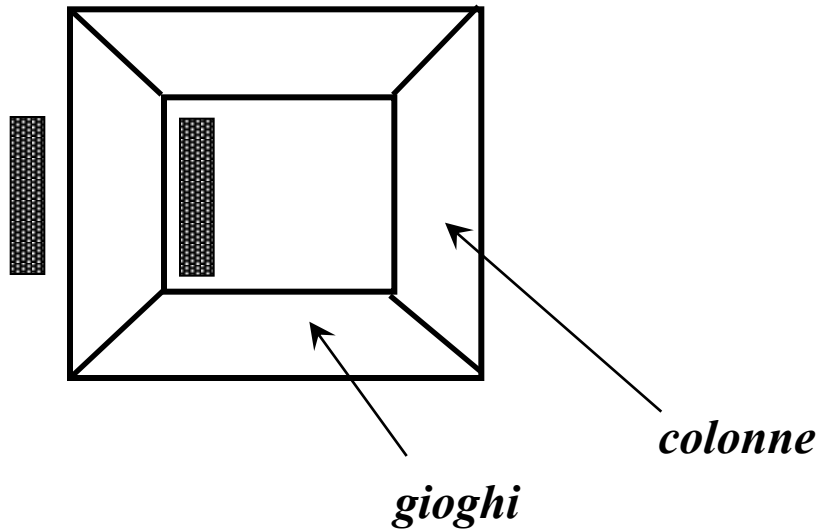
- **canalizzazione il flusso secondo percorsi definiti;**
- **aumento del coefficiente di autoinduzione principale;**
- **diminuzione della potenza reattiva associata alla magnetizzazione del nucleo;**
- **riduzione delle sezioni e quindi del peso del trasformatore.**



# *Trasformatore Monofase*

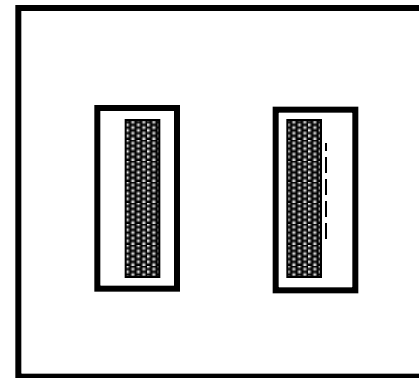
*Le strutture di supporto vengono realizzate utilizzando materiali ferromagnetici. Tali strutture vengono generalmente anche denominate “nuclei ferromagnetici”. Esse presentano, nel caso dei trasformatori monofasici, principalmente due tipi di forme.*

*Nucleo a colonna*



*I gioghi e le colonne sono sottoposte allo stesso flusso*

*Nucleo a mantello*



*la colonna centrale è soggetta ad un flusso doppio rispetto a tutte le altre parti della macchina*

# *Trasformatore Monofase*

## *Perdite nel ferro*

*Per limitare l'entità delle perdite nel ferro si utilizzano determinati accorgimenti costruttivi*

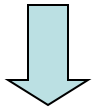
- *Laminazione (spessore dei lamierini da 0,5 a 0,35 mm)*
- *Utilizzazione di materiali ferromagnetici a bassa dissipazione*

*Per caratterizzare i lamierini relativamente alle perdite per isteresi e correnti parassite viene utilizzata la cifra di perdita.*

*La cifra di perdita indica la potenza dissipata in un pacco di lamierini del peso di 1 kg quando è sottoposto ad campo di induzione magnetico di tipo sinusoidale con frequenza di 50 Hz e valore di picco pari a 1 T.*

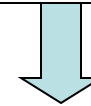
# Perdite nel ferro nel trasformatore reale

**Caratteristica magnetica  
statica**

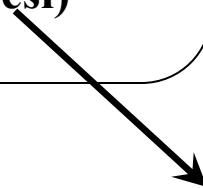


**Valutata facendo riferimento  
a condizioni di misura statiche.  
Non si tiene conto dei fenomeni  
dissipativi di natura dinamica.  
(perdite per isteresi)**

**Caratteristica magnetica  
dinamica**



**Valutata facendo riferimento  
a condizioni di misura dinamiche  
Tiene conto dei fenomeni  
dissipativi di natura  
dinamica e statica .  
(perdite per isteresi e  
correnti parassite)**



**Potenza specifica dissipata  
nei materiali ferromagnetici**

$$p_{fe} \cong K_1 f B_m^2 + K_2 f^2 B_m^2 \quad [\text{W/kg}]; \quad B_m = 1,3 \div 1,7 \text{ T}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

## Perdite nel ferro nel trasformatore reale

$$P_{fe} \cong (K_1 f + K_2 f^2) B_{mc}^2 \left[ \Pi_c + \Pi_g \left( \frac{S_c}{S_g} \right)^2 \right] [\text{W}];$$

$$E_{1m} = N_1 \left( \frac{d\varphi_c}{dt} \right)_{\max} = 2\pi f S_c B_{mc};$$

$$S_c B_{mc} = S_g B_{mg};$$

$\Pi_c \Rightarrow$  peso delle colonne

$\Pi_g \Rightarrow$  peso dei gioghi

$$P_{fe} \cong \left( \frac{K_1}{f} + K_2 \right) \left( \frac{E_{1m}}{2\pi S_c} \right)^2 \left[ \Pi_c + \Pi_g \left( \frac{S_c}{S_g} \right)^2 \right] [\text{W}]$$

**Se la frequenza è costante le perdite variano con legge quadratica  
al variare della tensione e dell'induzione;**

**Se l'induzione è costante le perdite variano con legge quadratica al  
variare della frequenza;**

**Se la tensione è costante le perdite diminuiscono all'aumentare della frequenza .**

$$P_{fe} \cong \left( \frac{K_1}{f} + K_2 \right) \left( \frac{E_{1m}}{2\pi S_c} \right)^2 \left[ \Pi_c + \Pi_g \left( \frac{S_c}{S_g} \right)^2 \right] [\text{W}]$$

*Se il trasformatore è collegato ad una rete di potenza prevalente si può ritenere che il valore della frequenza sia costante*

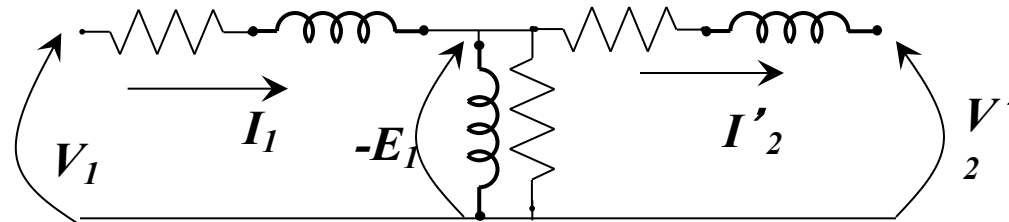
$$P_{fe} \cong G E_{1m}^2 [\text{W}]$$

$$G = \left( \frac{K_1}{f} + K_2 \right) \left( \frac{1}{2\pi S_c} \right)^2 \left[ \Pi_c + \Pi_g \left( \frac{S_c}{S_g} \right)^2 \right]$$

$$G = p_{fe} \left( \frac{1}{2\pi f S_c} \right)^2 \left[ \Pi_c + \Pi_g \left( \frac{S_c}{S_g} \right)^2 \right]$$

*Note la perdita specifica, le dimensioni geometriche del trasformatore e il suo peso è possibile determinare il valore della resistenza rappresentante le perdite nel ferro*

$$P_{fe} \cong G E_{1m}^2 = \frac{E_1^2}{R_{fe}}$$

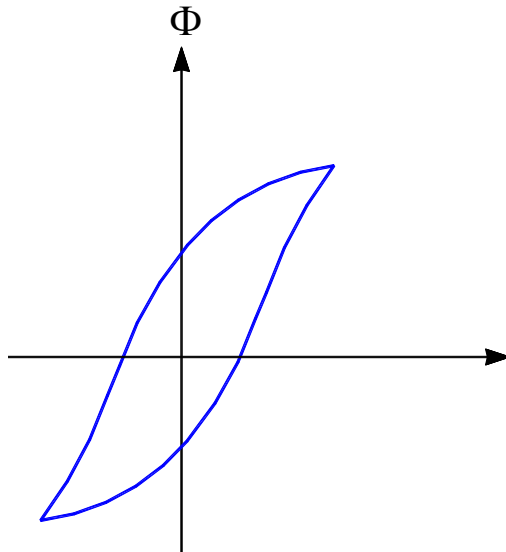


# trasformatore reale: funzionamento a vuoto

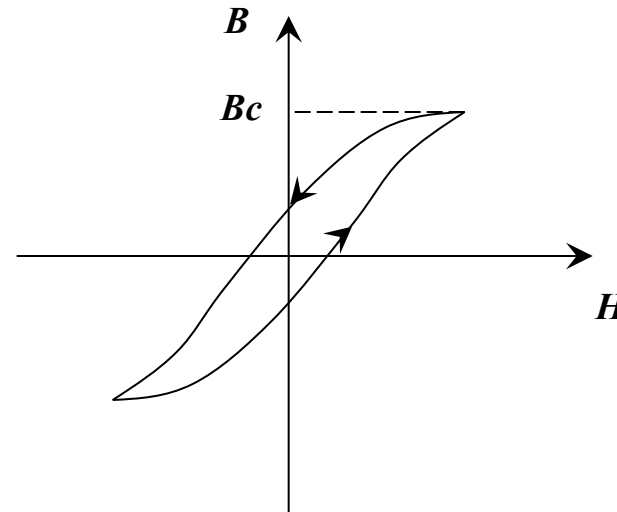
Interpretiamo fisicamente tale fenomeno analizzando la caratteristica dinamica del trasformatore al variare delle condizioni di funzionamento imposte.

La legge che lega i valori di induzione, tensione e frequenza ci consente di valutare quali sono le modifiche a cui è soggetto il ciclo dinamico

$$V_{1m} \cong e_{1m} = 2\pi f S_c B_{mc}; \Rightarrow \frac{V_{1m}}{2\pi f S_c} \cong B_{mc}$$



*Ciclo di isteresi dinamico*



# Trasformatore Reale

## Funzionamento a vuoto

### Differenza rispetto al caso ideale:

- presenza del nucleo ferromagnetico;
- caratteristica magnetica non lineare;
- presenza delle perdite per isteresi e correnti parassite.

**Ip. Semplificativa:**  
trascuriamo le cadute di tensione sulla  
resistenza e sull'induttanza di dispersione



### Equazione di equilibrio elettrico avvolgimento primario

$$v_1 = r_1 i_{10} + L_{1d} \frac{di_{10}}{dt} + N_1 \frac{d\varphi_c(i_{10})}{dt};$$

$$v_1 = \sqrt{2} V_1 \text{sen}(\omega t);$$

$$N_1 i_{10} = \oint \bar{H} \circ d\bar{l} = \varphi_c \oint \frac{dl}{S\mu(i_{10})}; \Rightarrow \varphi_c = f(i_{10})$$

$$v_1 \cong N_1 \frac{d\varphi_c}{dt}; \quad v_1 = \sqrt{2} V_1 \text{sen}(\omega t);$$

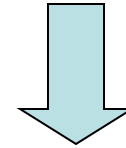
$$\varphi_c = \frac{-\sqrt{2} V}{\omega N_1} \cos(\omega t);$$

# Trasformatore Reale

**Secondo le ipotesi fatte se la tensione di alimentazione è sinusoidale anche il flusso lo è**



**Se fosse noto in forma chiusa il legame funzionale esistente tra il flusso e la corrente sarebbe possibile determinare immediatamente la corrente circolante a vuoto.**



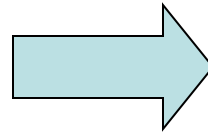
**Di solito questo non è noto ma viene fornita la caratteristica magnetica dinamica del trasformatore.  
Si segue una procedura grafica.**



# Trasformatore Reale

La corrente circolante a vuoto nel trasformatore può anche essere ottenuta decomponendo il ciclo di isteresi dinamico:

- linea media;
- ciclo di isteresi dinamico riferito alla linea media.



Ripetendo la procedura grafica precedentemente descritta definisco due componenti della corrente a vuoto circolante nel trasformatore:  
componente magnetizzante  
componente attiva

$$i_{10} = i_a + i_\mu;$$

$i_a$  componente attiva

$i_\mu$  componente magnetizzante

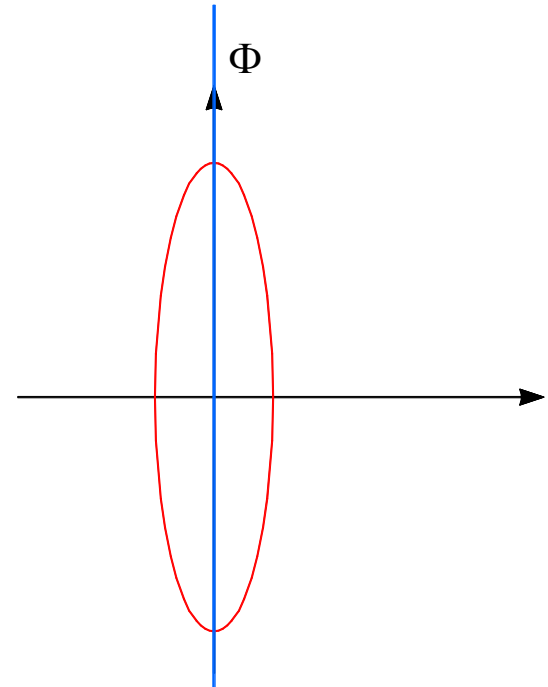
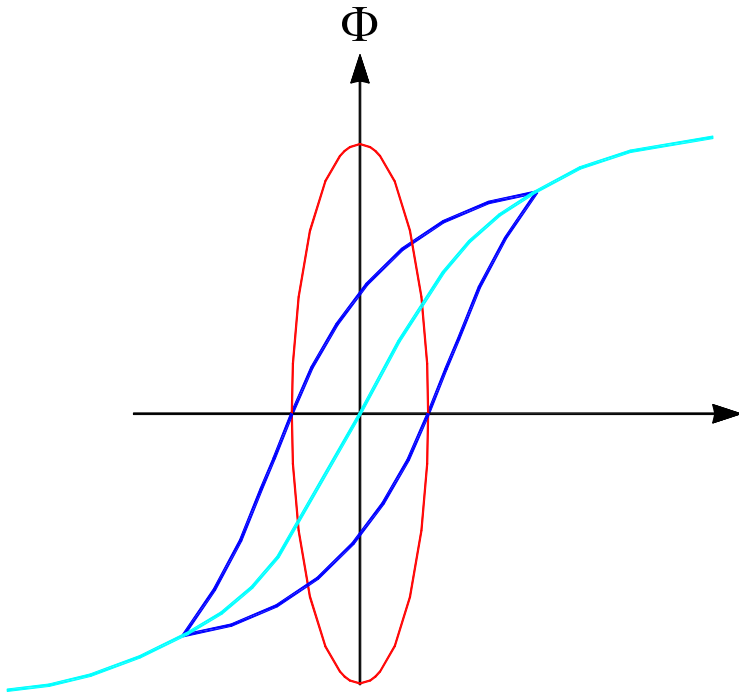
Fisicamente la linea media mi consente di considerare, l'effetto della non linearità del circuito magnetico e di trascurare le perdite. Il ciclo di isteresi dinamico riferito alla linea media mi consente di considerare il nucleo come se fosse a permeabilità magnetica infinita ma nel quale sono presenti le perdite.

La componente attiva sarà in fase con la tensione di alimentazione per cui:

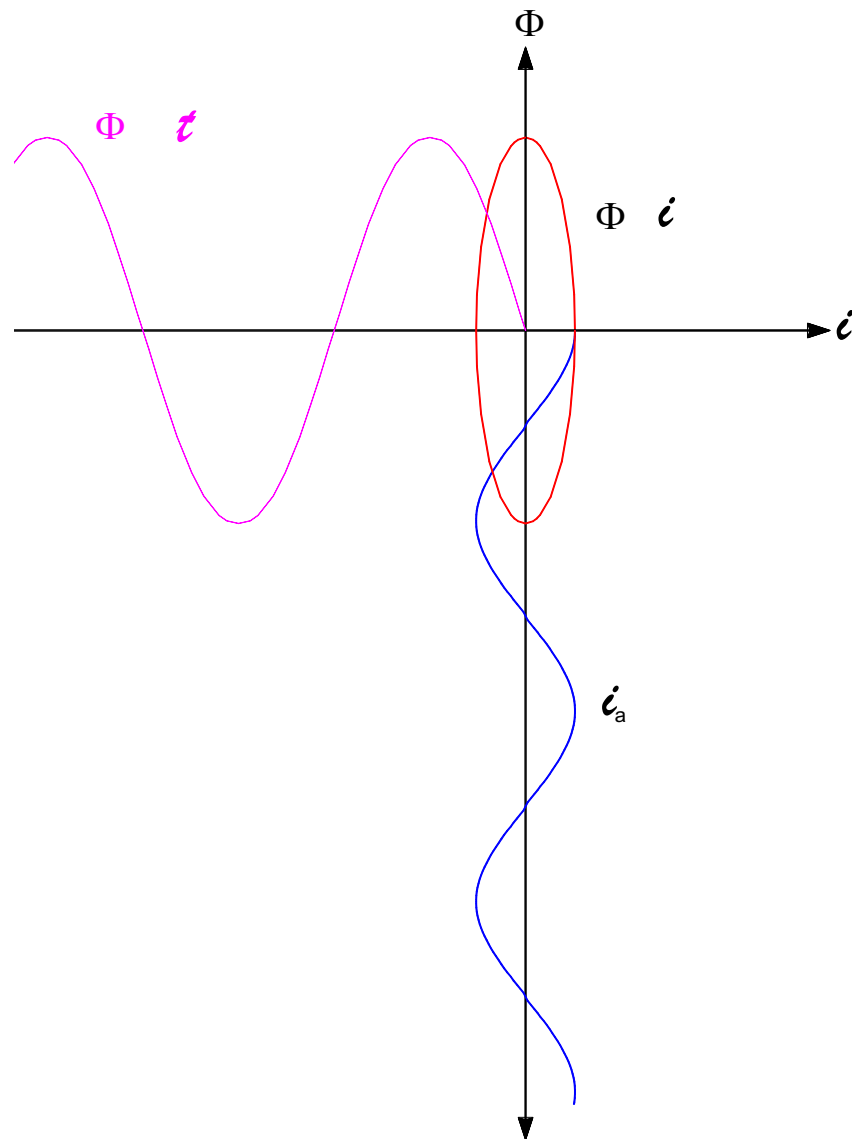
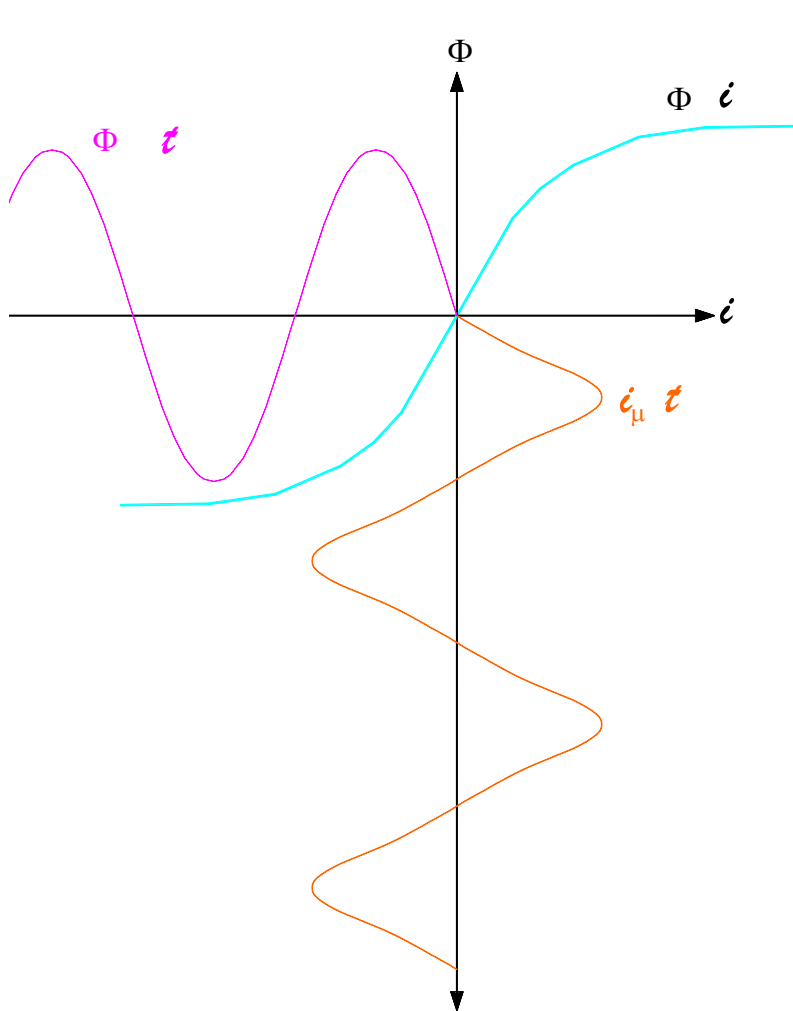
$$v_1 = \sqrt{2} V_1 \text{sen}(\omega t);$$

$$i_a = \sqrt{2} I_a \text{sen}(\omega t); \quad 17$$

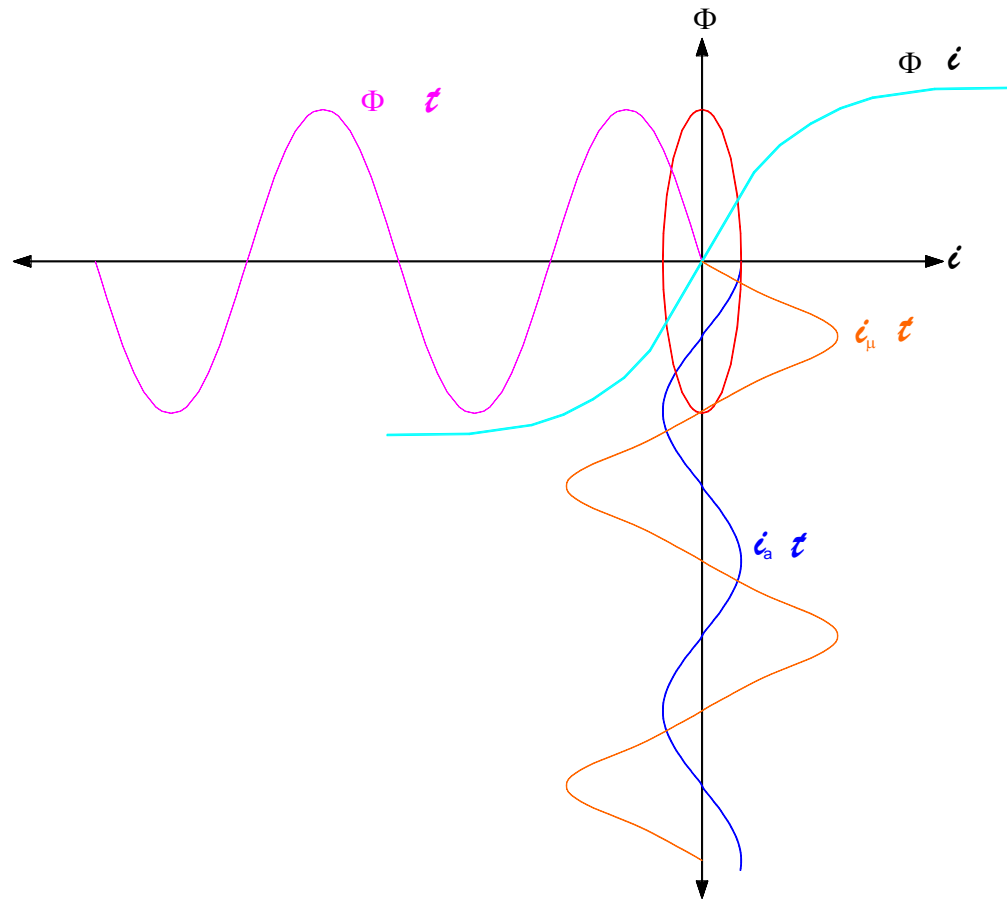
## *Decomposizione del ciclo di isteresi dinamico*



# Procedura grafica per la determinazione della corrente a vuoto



## *Procedura grafica per la determinazione della corrente a vuoto*



# Trasformatore Reale

**Vista la forte simmetria pari e dispari della corrente si può ritenere con sufficiente approssimazione che le ampiezze delle armoniche di ordine superiore in coseno siano trascurabili per cui:**

$$v_1 = \sqrt{2} V_1 \text{sen}(\omega t);$$

$$i_a = \sqrt{2} I_a \text{sen}(\omega t);$$

$$i_\mu = \sqrt{2} \sum_0^{\infty} h \left\{ I_{\mu(1+2h)} \cos(1+2h)\omega t \right\}$$

$$i_{10} = \sqrt{2} \sum_0^{\infty} h \left\{ I_{\mu(1+2h)} \cos(1+2h)\omega t \right\} + \sqrt{2} I_a \text{sen}\omega t$$

*Nel funzionamento a vuoto del trasformatore reale all'applicazione di una tensione sinusoidale corrisponde, a regime, la circolazione di una corrente non sinusoidale i cui contenuto armonico è strettamente legato al punto di lavoro del nucleo ferromagnetico*

# Trasformatore Reale

## Funzionamento sotto carico

**Determinazione delle correnti circolanti negli avvolgimenti primari e secondari di un trasformatore reale note le tensioni di ingresso e di uscita**

$$v_1 = \left( r_1 + L_{1d} \frac{d}{dt} \right) i_1 + N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1\mu})}{dt};$$

$$e_2 = \left( r_2 + L_{2d} \frac{d}{dt} \right) i_2 + v_2;$$

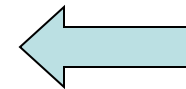
$$N_1 i_{1\mu} = N_1 i_1 + N_2 i_2$$

$$v_1 = \sqrt{2} V_1 \text{sen}(\omega t);$$

$$v_1 = \left( r_1 + L_{1d} \frac{d}{dt} \right) i_1 + N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1\mu})}{dt};$$

$$N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1\mu})}{dt} = \left( r_2' + L_{2d}' \frac{d}{dt} \right) i_2' + v_2';$$

$$i_{1\mu} = i_1 - i_2'$$

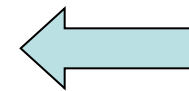


**Eseguendo il riporto delle grandezze secondarie al primario,**

# Trasformatore Reale

$$v_1 = \left( r_1 + L_{1d} \frac{d}{dt} \right) i_1 + N_1 \frac{d\varphi_m(i_{1\mu})}{dt};$$

$$-v'_2 = \left( r'_2 + L'_{2d} \frac{d}{dt} \right) i'_2 - N_1 \frac{d\varphi_m(i_{1\mu})}{dt};$$



**Eseguendo la somma e la sottrazione delle eq. ottenute**

$$v_1 - v'_2 = (r_1 i_1 + r'_2 i'_2) + \left( L_{1d} \frac{di_1}{dt} + L'_{2d} \frac{di'_2}{dt} \right);$$

$$v_1 + v'_2 = (r_1 i_1 + r'_2 i'_2) + \left( L_{1d} \frac{di_1}{dt} + L'_{2d} \frac{di'_2}{dt} \right) + 2N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1\mu})}{dt};$$

$$i_n = i_1 + i'_2; \quad i_m = i_1 - i'_2;$$

$$r_1 \cong r'_2 = \frac{r_{1cc}}{2}; \quad L_{1d} \cong L'_{2d} = \frac{L_{1cc}}{2}$$

$$v_1 - v_2' = \frac{r_{1cc}}{2} i_{1n} + \frac{L_{1cc}}{2} \frac{di_{1n}}{dt};$$

$$v_1 + v_2' = \frac{r_{1cc}}{2} i_{1m} + \frac{L_{1cc}}{2} \frac{di_{1m}}{dt} + 2N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1m})}{dt};$$

$$i_m = i_1 - i_2';$$

$i_m$  è la corrente magnetizzante del trasformatore. L'analisi delle eq. Evidenzia la presenza di un'equazione differenziale non lineare formalmente e fisicamente uguale a quella del trasformatore a vuoto.

$$ip : v_1 \cong v_2'$$

$$2v_1 = \frac{r_{1cc}}{2} i_{1m} + \frac{L_{1cc}}{2} \frac{di_{1m}}{dt} + 2N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1m})}{dt};$$

$$v_1 \cong N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1m})}{dt};$$

**Ip. Semplificativa:**  
trascuriamo le cadute di tensione sulla resistenza e sull'induttanza di dispersione e ripetendo la costruzione grafica

$$v_1 = \sqrt{2} V_1 \text{sen}(\omega t);$$

$$i_{1m} = \sqrt{2} \sum_0^{\infty} h \left\{ I_{\mu(1+2h)} \cos(1+2h)\omega t \right\} + \sqrt{2} I_a \text{sen} \omega t$$



$$v_1 - v'_2 = \frac{r_{1cc}}{2} i_{1n} + \frac{L_{1cc}}{2} \frac{di_{1n}}{dt};$$

$$i_{1n} = \frac{V_m}{\sqrt{2} z_{cc}} \text{sen}(\omega t + \varphi_m - \varphi);$$

$$i_n = i_1 + i'_2; \quad i_m = i_1 - i'_2;$$

$$i_1 = i_n + i_m; \quad i'_2 = i_n - i_m;$$

$$i_1 = \frac{i_n + i_m}{2}; \quad i_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{V_m}{\sqrt{2} z_{cc}} \text{sen}(\omega t + \varphi_m - \varphi) + \sqrt{2} \sum_0^{\infty} h \left\{ I_{\mu(1+2h)} \cos(1+2h)\omega t \right\} + \sqrt{2} I_a \text{sen} \omega t \right\}$$

$$i'_2 = \frac{i_n - i_m}{2}; \quad i'_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{V_m}{\sqrt{2} z_{cc}} \text{sen}(\omega t + \varphi_m - \varphi) - \sqrt{2} \sum_0^{\infty} h \left\{ I_{\mu(1+2h)} \cos(1+2h)\omega t \right\} + \sqrt{2} I_a \text{sen} \omega t \right\}$$

Tale eq. Differenziale è lineare

Ip: tensione primaria e secondaria riportata al primario sinusoidali e isofrequenziali pertanto la loro differenza è pari a

$$v_1 - v'_2 = \sqrt{2} V_m \sin(\omega t + \varphi_m)$$

**Nelle condizioni di funzionamento considerate e nei limiti di validità delle ipotesi fatte le correnti che attraversano gli avvolgimenti sotto carico NON sono sinusoidali**

# Trasformatore Reale

**Considerazioni sulla corrente di magnetizzazione  $i_m$ :**

- **le ampiezze delle componenti armoniche di ordine superiore non sono trascurabili rispetto all'armonica fondamentale;**
- **il nucleo ferromagnetico richiede bassi valori di corrente per eseguire la magnetizzazione;**
- **Le cadute sulle impedenze di dispersione primaria sono molto piccole per cui le tensioni indotte sotto carico sono praticamente identiche a quelle a vuoto, per cui la corrente a vuoto sarà poco differente dalla corrente  $i_m$ .**

**Il peso delle componenti armoniche della corrente  $i_m$  sarà tanto meno influente quanto più elevate saranno le correnti associate al carico.**

**Pertanto si può ritenere con ragionevole approssimazione che le correnti circolanti sotto carico nel trasformatore reale siano sinusoidali ed il suo comportamento sia assimilabile a quello di un sistema lineare.**