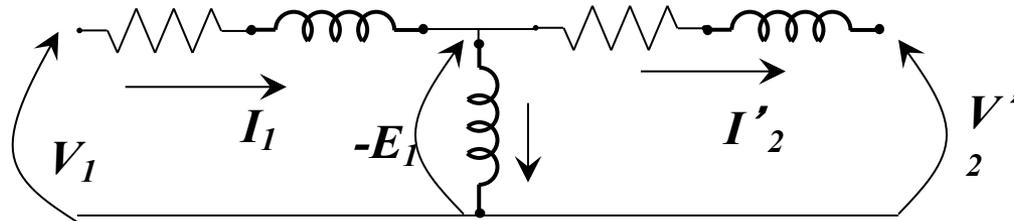


$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = r_1 i_1 + L_{1d} \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d}{dt} i_{1\mu} \\ L_1 \frac{d}{dt} i_{1\mu} = r_2' i_2' + L_{2d}' \frac{di_2'}{dt} + v_2' \\ i_{1\mu} = i_1 - i_2' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = r_1 i_1 + L_{1d} \frac{di_1}{dt} - e_{1m} \\ -e_{1m} = r_2' i_2' + L_{2d}' \frac{di_2'}{dt} + v_2' \\ i_{1\mu} = i_1 - i_2' \end{array} \right.$$



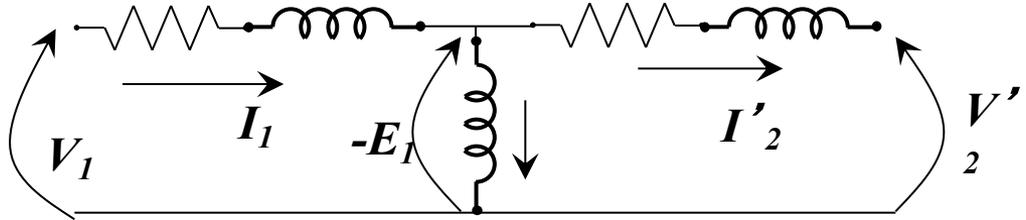
Passando al regime sinusoidale permanente

$$\begin{array}{ll} \bar{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{1d}) \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_m; & j\omega L_1 \bar{I}_{1\mu} = (R_2' + j\omega L_{2d}') \bar{I}_2' + \bar{V}_2' \\ \bar{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{1d}) \bar{I}_1 + j\omega N_1 \bar{\Phi}_m; & j\omega L_1 \bar{I}_{1\mu} = \dot{z}'_{d2} \bar{I}_2' + \bar{V}_2' \\ \bar{V}_1 = \dot{z}_{1d} \bar{I}_1 - \bar{E}_1 & \bar{I}_{1\mu} = \bar{I}_1 - \bar{I}_2' \end{array}$$

$$\bar{V}_1 = \dot{z}_{d1} \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_\mu$$

$$j\omega L_1 \bar{I}_\mu = \dot{z}'_{d2} \bar{I}'_2 + \bar{V}'_2$$

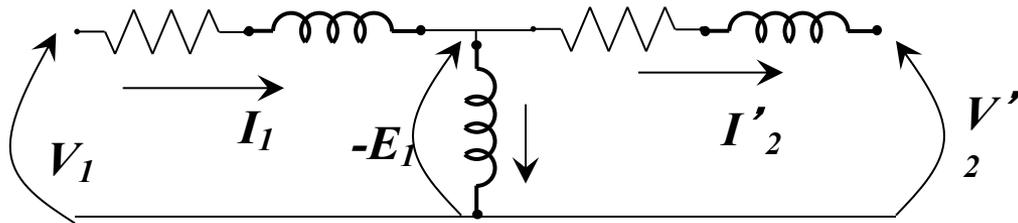
$$\bar{I}_1 = \bar{I}_\mu + \bar{I}'_2$$



Funzionamento a vuoto in regime sinusoidale permanente

Funzionamento sotto carico in regime sinusoidale permanente

Funzionamento sotto carico in regime sinusoidale permanente

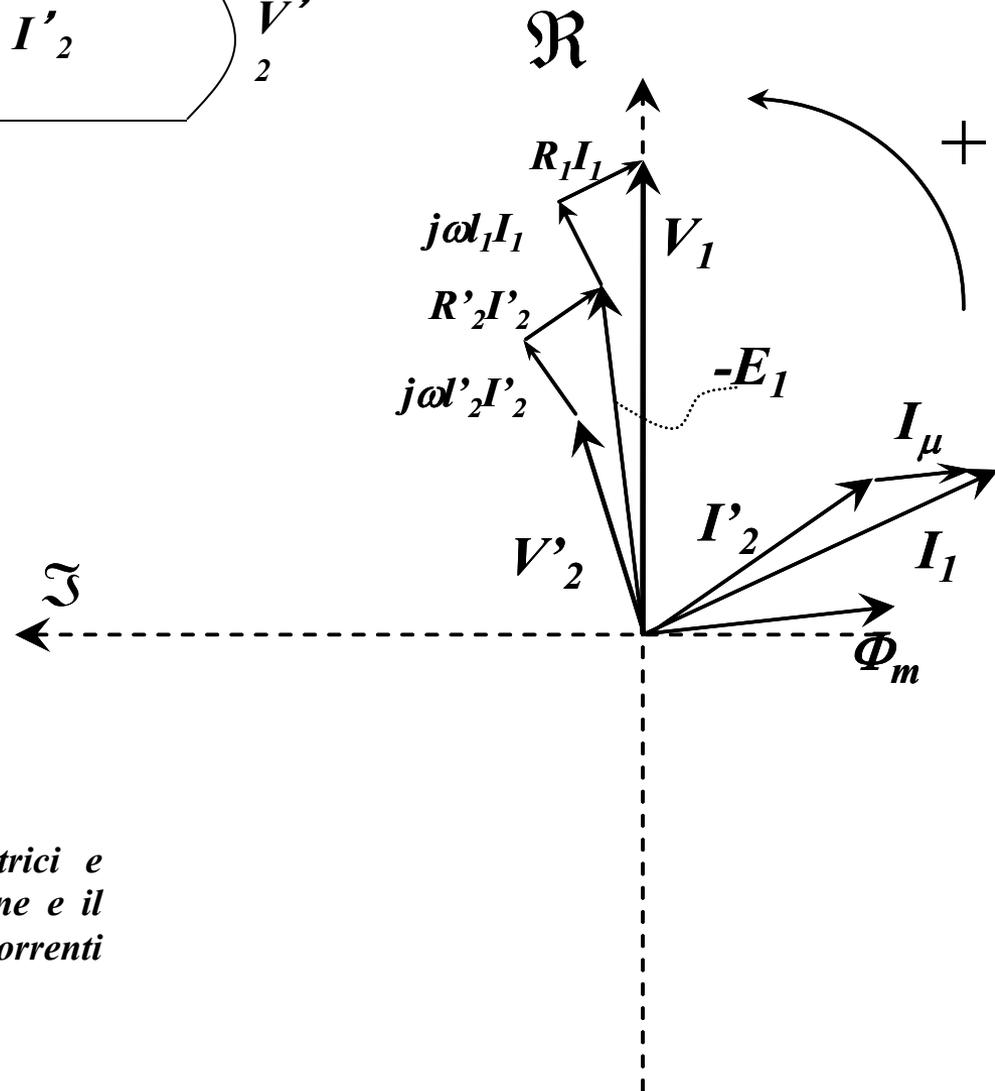


$$\bar{V}_1 = \dot{z}_{d1} \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_\mu$$

$$j\omega L_1 \bar{I}_\mu = \dot{z}'_{d2} \bar{I}'_2 + \bar{V}'_2$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_\mu + \bar{I}'_2$$

$$-\bar{E}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_\mu = j\omega N_1 \phi_m$$



Se sono noti tutti i parametri elettrici e magnetici, la tensione di alimentazione e il carico possono essere determinate le correnti al primario e al secondario.

Trasformatore Monofase

L'analisi del diagramma vettoriale mette in luce la presenza di una differenza in modulo e fase tra la tensione presente al primario e la tensione presente sul secondario riportata al primario. In un trasformatore ideale tale differenza è nulla.

La potenza complessa assorbita dalla macchina è diversa da zero, mentre nella macchina ideale è uguale a zero

$$\dot{A}_t = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* - \bar{V}_2 \bar{I}_2'^* = (\dot{z}_{d1} \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_\mu) \bar{I}_1^* - (j\omega L_1 \bar{I}_\mu - \dot{z}'_{d2} \bar{I}_2') \bar{I}_2'^*$$

$$\dot{A}_t = (\dot{z}_{d1} \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_\mu) \bar{I}_1^* - (j\omega L_1 \bar{I}_\mu - \dot{z}'_{d2} \bar{I}_2') \bar{I}_2'^*$$

$$\dot{A}_t = \dot{z}_{d1} I_1^2 + \dot{z}'_{d2} I_2'^2 + j\omega L_1 \bar{I}_\mu (\bar{I}_1^* - \bar{I}_2'^*)$$

$$\dot{A}_t = \dot{z}_{d1} I_1^2 + \dot{z}'_{d2} I_2'^2 + j\omega L_1 I_\mu^2$$

$$\Re(\dot{A}_t) = R_1 I_1^2 + R_2' I_2'^2;$$

$$\Im(\dot{A}_t) = \omega (L_{d1} I_1^2 + L_{d1}' I_2'^2 + L_1 I_\mu^2)$$

Trasformatore Monofase

$$\Re(\dot{A}_t) = R_1 I_1^2 + R_2 I_2'^2;$$

$$\Im(\dot{A}_t) = \omega(L_{d1} I_1^2 + L_{d1}' I_2'^2 + L_1 I_\mu^2)$$

Per minimizzare l'assorbimento di potenza complessa:

- Ridurre i valori delle resistenza primarie e secondarie (compatibilmente con i costi di produzione e di esercizio del trasformatore)*
- Ridurre la il valore della corrente primaria a parità di corrente secondaria richiesta dal carico*
- Ridurre i coefficienti di autoinduzione di dispersione;*
- Minimizzare la potenza reattiva associata al flusso di mutuo accoppiamento*

$$Q_m = \omega L_1 I_\mu^2 \quad \phi_m = \frac{L_1}{N_1} I_\mu \quad L_1 = \Gamma N_1^2$$

$$Q_m = \omega \frac{\lambda_{1m}^2}{L_1} = \omega \frac{\phi_{1m}^2}{\Gamma}$$

Se il valore efficace del flusso di muta e la pulsazione elettrica possono essere considerate costanti, la potenza reattiva può essere minimizzata massimizzando Γ

Trasformatore Monofase

La massimizzazione della permeanza del circuito magnetico

$$\Gamma = \frac{\mu S}{l};$$

- **Aumentare la sezione delle colonne;**
- **aumentare la permeabilità magnetica assoluta dei materiali costituenti il circuito magnetico;**
- **diminuire la lunghezza dei percorsi seguiti dalle linee di flusso**

L'entità delle variazioni di permeanza magnetica che possono essere ottenute agendo sulla permeabilità magnetica assoluta del mezzo sono di gran lunga superiori a quelle che si possono ingegneristicamente ottenere agendo sulle dimensioni del circuito stesso.

Trasformatore Monofase

I materiali utilizzati per la realizzazione del circuito magneti sono esclusivamente di natura ferromagnetica

Svantaggi:

- **Incremento delle perdite per effetto dell'isteresi magnetica e delle correnti parassite**
- **caratteristica non lineare-polidromica.**

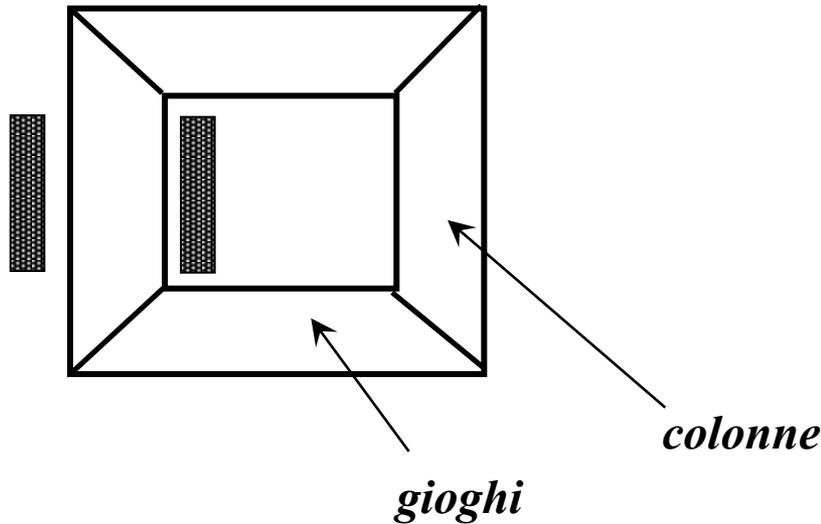
Vantaggi:

- **canalizzazione il flusso secondo percorsi definiti;**
- **aumento del coefficiente di autoinduzione principale;**
- **diminuzione della potenza reattiva associata alla magnetizzazione del nucleo;**
- **riduzione delle sezioni e quindi del peso del trasformatore.**

Trasformatore Monofase

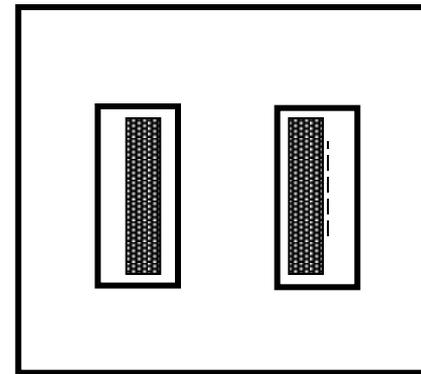
Le strutture di supporto vengono realizzate utilizzando materiali ferromagnetici. Tali strutture vengono generalmente anche denominate “nuclei ferromagnetici”. Esse presentano, nel caso dei trasformatori monofasici, principalmente due tipi di forme.

Nucleo a colonna



I gioghi e le colonne sono sottoposte allo stesso flusso

Nucleo a mantello



la colonna centrale è soggetta ad un flusso doppio rispetto a tutte le altre parti della macchina

Trasformatore Monofase

Perdite nel ferro

Per limitare l'entità delle perdite nel ferro si utilizzano determinati accorgimenti costruttivi

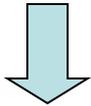
- *Laminazione (spessore dei lamierini da 0,5 a 0,35 mm)*
- *Utilizzazione di materiali ferromagnetici a bassa dissipazione*

Per caratterizzare i lamierini relativamente alle perdite per isteresi e correnti parassite viene utilizzata la cifra di perdita.

La cifra di perdita indica la potenza dissipata in un pacco di lamierini del peso di 1 kg quando è sottoposto ad campo di induzione magnetico di tipo sinusoidale con frequenza di 50 Hz e valore di picco pari a 1 T.

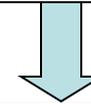
Perdite nel ferro nel trasformatore reale

**Caratteristica magnetica
statica**



**Valutata facendo riferimento
a condizioni di misura statiche.
Non si tiene conto dei fenomeni
dissipativi di natura dinamica.
(perdite per isteresi)**

**Caratteristica magnetica
dinamica**



**Valutata facendo riferimento
a condizioni di misura dinamiche
Tiene conto dei fenomeni
dissipativi di natura
dinamica e statica .
(perdite per isteresi e
correnti parassite)**

**Potenza specifica dissipata
nei materiali ferromagnetici**

$$p_{fe} \cong K_1 f B_m^2 + K_2 f^2 B_m^2 \quad [\text{W/kg}]; \quad B_m = 1,3 \div 1,7 \text{ T}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

Perdite nel ferro nel trasformatore reale

$$P_{fe} \cong (K_1 f + K_2 f^2) B_{mc}^2 \left[\Pi_c + \Pi_g \left(\frac{S_c}{S_g} \right)^2 \right] [\text{W}];$$

$$E_{1m} = N_1 \left(\frac{d\varphi_c}{dt} \right)_{\max} = 2\pi f S_c B_{mc};$$

$$S_c B_{mc} = S_g B_{mg};$$

$\Pi_c \Rightarrow$ peso delle colonne

$\Pi_g \Rightarrow$ peso dei gioghi

$$P_{fe} \cong \left(\frac{K_1}{f} + K_2 \right) \left(\frac{E_{1m}}{2\pi S_c} \right)^2 \left[\Pi_c + \Pi_g \left(\frac{S_c}{S_g} \right)^2 \right] [\text{W}]$$

**Se la frequenza è costante le perdite variano con legge quadratica
al variare della tensione e dell'induzione;**

**Se l'induzione è costante le perdite variano con legge quadratica al
variare della frequenza;**

Se la tensione è costante le perdite diminuiscono all'aumentare della frequenza .

$$P_{fe} \cong \left(\frac{K_1}{f} + K_2 \right) \left(\frac{E_{1m}}{2\pi S_c} \right)^2 \left[\Pi_c + \Pi_g \left(\frac{S_c}{S_g} \right)^2 \right] [\text{W}]$$

Se il trasformatore è collegato ad una rete di potenza prevalente si può ritenere che il valore della frequenza sia costante

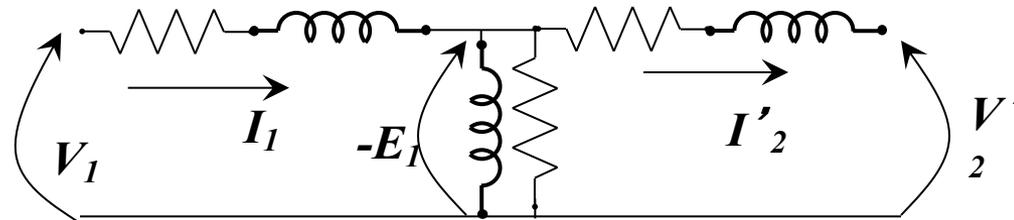
$$P_{fe} \cong G E_{1m}^2 [\text{W}]$$

$$G = \left(\frac{K_1}{f} + K_2 \right) \left(\frac{1}{2\pi S_c} \right)^2 \left[\Pi_c + \Pi_g \left(\frac{S_c}{S_g} \right)^2 \right]$$

$$G = p_{fe} \left(\frac{1}{2\pi f S_c} \right)^2 \left[\Pi_c + \Pi_g \left(\frac{S_c}{S_g} \right)^2 \right]$$

Note la perdita specifica, le dimensioni geometriche del trasformatore e il suo peso è possibile determinare il valore della resistenza rappresentante le perdite nel ferro

$$P_{fe} \cong G E_{1m}^2 = \frac{E_1^2}{R_{fe}}$$

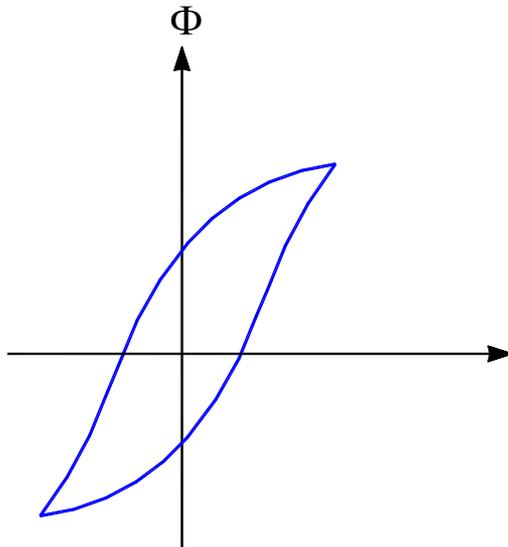


trasformatore reale: funzionamento a vuoto

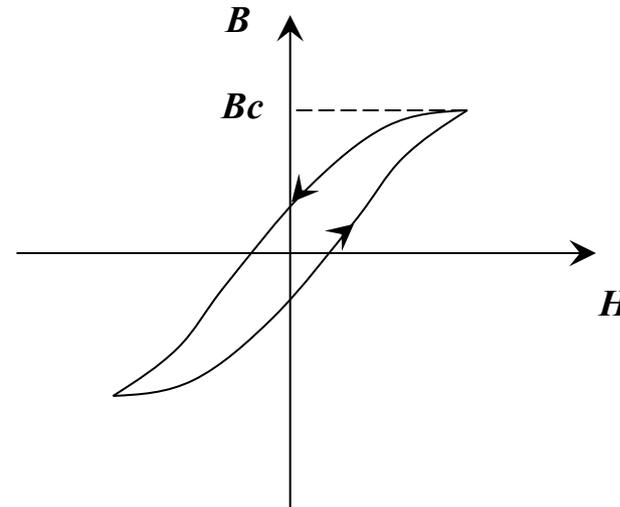
Interpretiamo fisicamente tale fenomeno analizzando la caratteristica dinamica del trasformatore al variare delle condizioni di funzionamento imposte.

La legge che lega i valori di induzione, tensione e frequenza ci consente di valutare quali sono le modifiche a cui è soggetto il ciclo dinamico

$$V_{1m} \cong e_{1m} = 2\pi f S_c B_{mc}; \Rightarrow \frac{V_{1m}}{2\pi f S_c} \cong B_{mc}$$



Ciclo di isteresi dinamico



Trasformatore Reale

Funzionamento a vuoto

Differenza rispetto al caso ideale:

- presenza del nucleo ferromagnetico;
- caratteristica magnetica non lineare;
- presenza delle perdite per isteresi e correnti parassite.

Ip. Semplificativa:
trascuriamo le cadute di tensione sulla
resistenza e sull'induttanza di dispersione



Equazione di equilibrio elettrico avvolgimento primario

$$v_1 = r_1 i_{10} + L_{1d} \frac{di_{10}}{dt} + N_1 \frac{d\varphi_c(i_{10})}{dt};$$

$$v_1 = \sqrt{2} V_1 \text{sen}(\omega t);$$

$$N_1 i_{10} = \oint \bar{H} \circ d\bar{l} = \varphi_c \oint \frac{dl}{S\mu(i_{10})}; \Rightarrow \varphi_c = f(i_{10})$$

$$v_1 \cong N_1 \frac{d\varphi_c}{dt}; \quad v_1 = \sqrt{2} V_1 \text{sen}(\omega t);$$

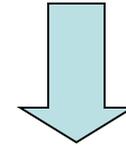
$$\varphi_c = \frac{-\sqrt{2} V}{\omega N_1} \cos(\omega t);$$

Trasformatore Reale

Secondo le ipotesi fatte se la tensione di alimentazione è sinusoidale anche il flusso lo è



Se fosse noto in forma chiusa il legame funzionale esistente tra il flusso e la corrente sarebbe possibile determinare immediatamente la corrente circolante a vuoto.

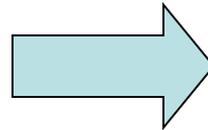


**Di solito questo non è noto ma viene fornita la caratteristica magnetica dinamica del trasformatore.
Si segue una procedura grafica.**

Trasformatore Reale

La corrente circolante a vuoto nel trasformatore può anche essere ottenuta decomponendo il ciclo di isteresi dinamico:

- linea media;
- ciclo di isteresi dinamico riferito alla linea media.



Ripetendo la procedura grafica precedentemente descritta definisco due componenti della corrente a vuoto circolante nel trasformatore:
componente magnetizzante
componente attiva

$$i_{10} = i_a + i_\mu;$$

i_a componente attiva

i_μ componente magnetizzante

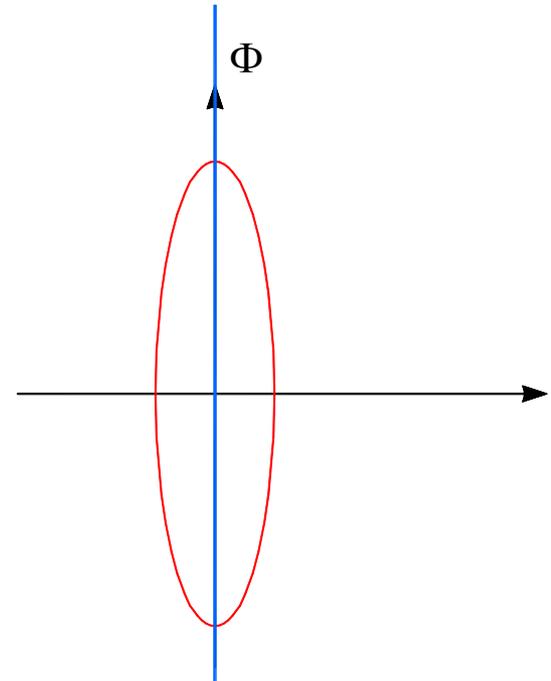
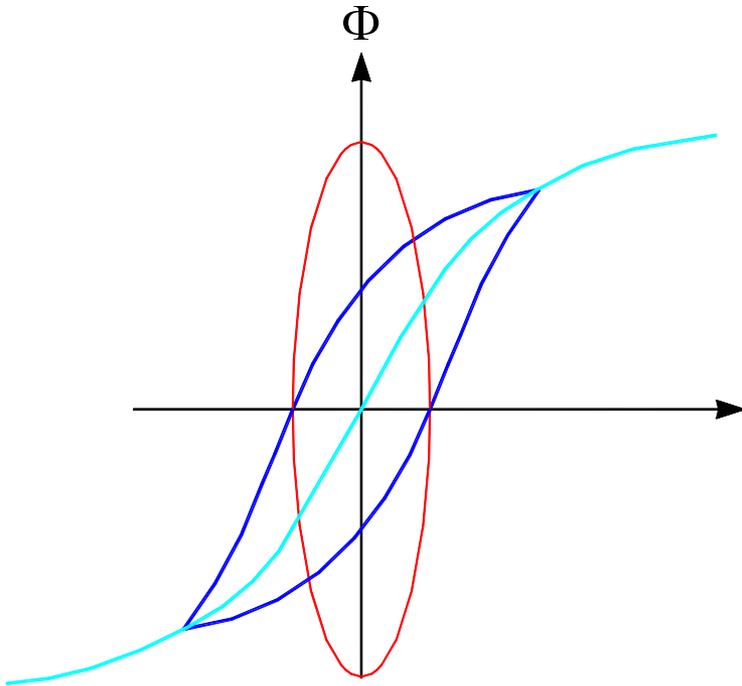
Fisicamente la linea media mi consente di considerare, l'effetto della non linearità del circuito magnetico e di trascurare le perdite. Il ciclo di isteresi dinamico riferito alla linea media mi consente di considerare il nucleo come se fosse a permeabilità magnetica infinita ma nel quale sono presenti le perdite.

La componente attiva sarà in fase con la tensione di alimentazione per cui:

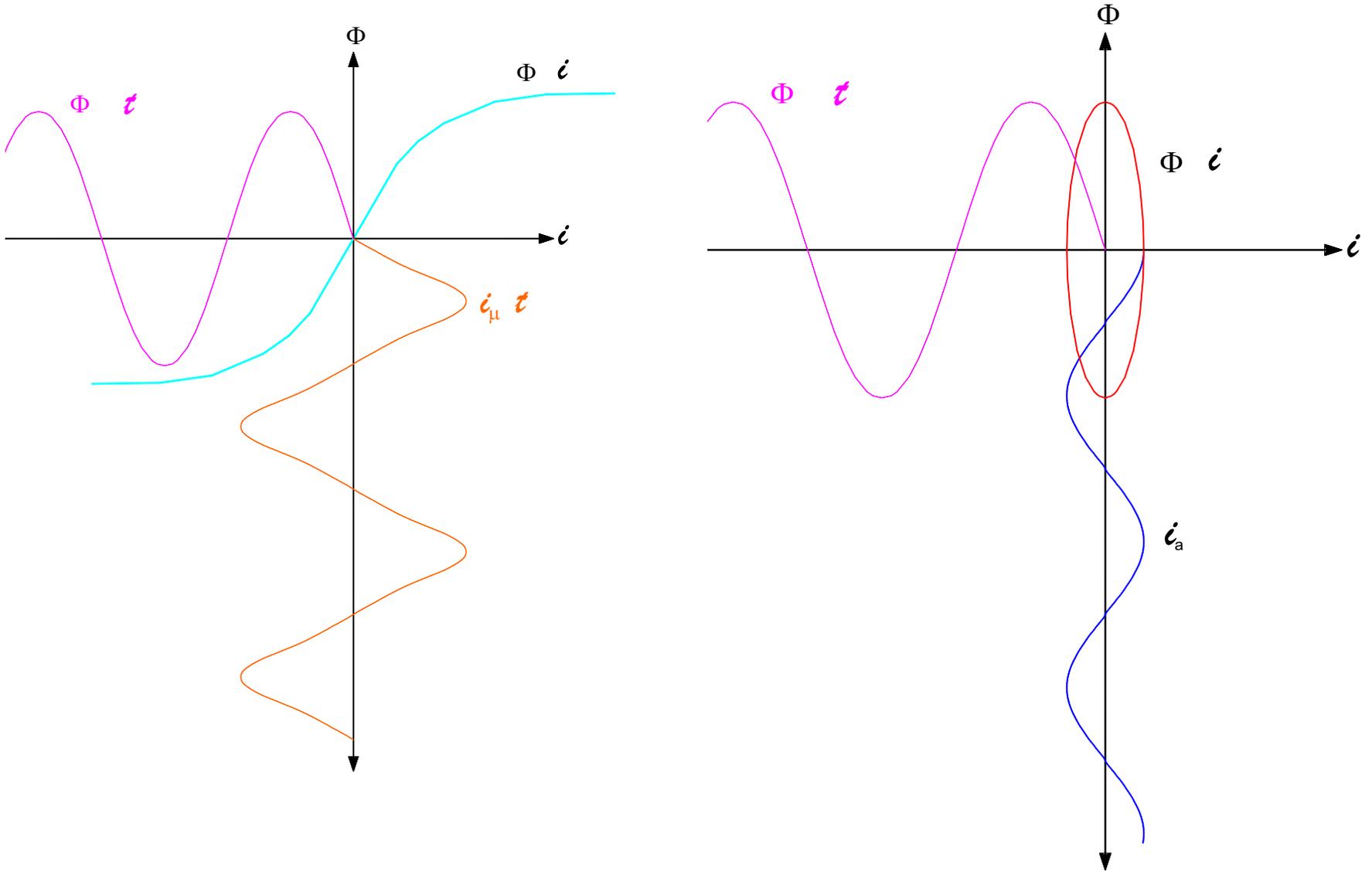
$$v_1 = \sqrt{2} V_1 \text{sen}(\omega t);$$

$$i_a = \sqrt{2} I_a \text{sen}(\omega t); \quad 17$$

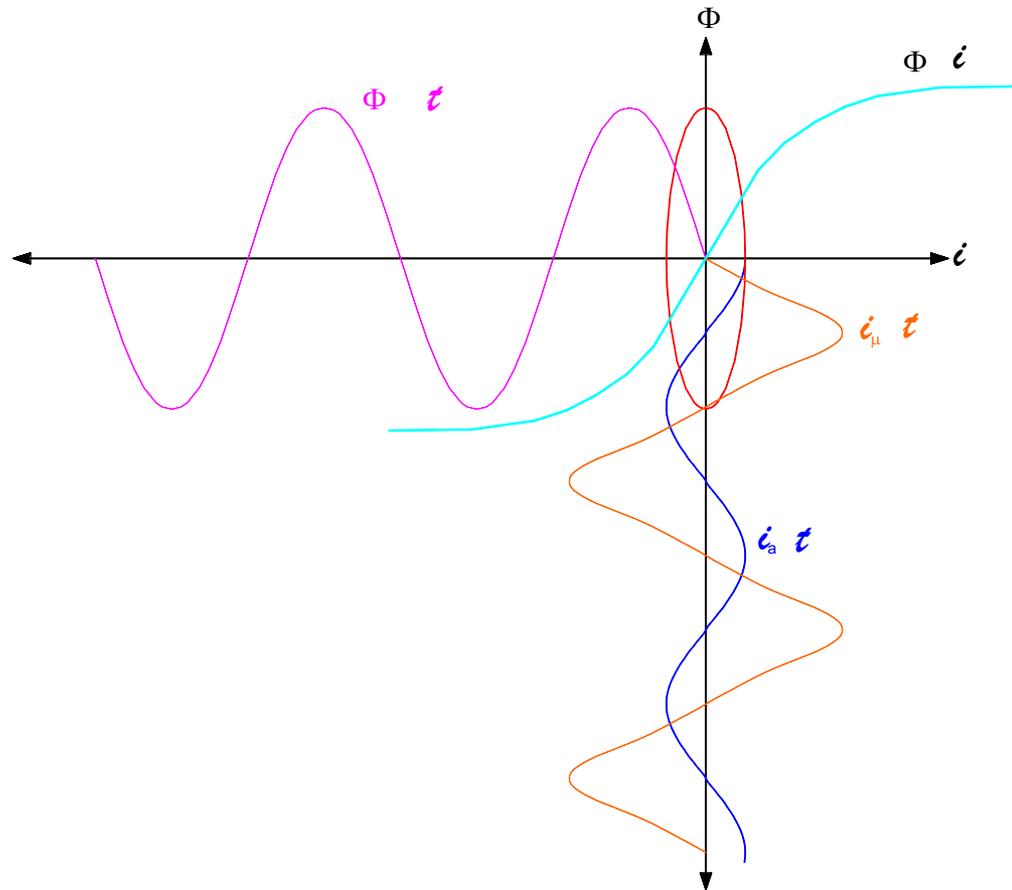
Decomposizione del ciclo di isteresi dinamico



Procedura grafica per la determinazione della corrente a vuoto



Procedura grafica per la determinazione della corrente a vuoto



Trasformatore Reale

Vista la forte simmetria pari e dispari della corrente si può ritenere con sufficiente approssimazione che le ampiezze delle armoniche di ordine superiore in coseno siano trascurabili per cui:

$$v_1 = \sqrt{2} V_1 \text{sen}(\omega t);$$

$$i_a = \sqrt{2} I_a \text{sen}(\omega t);$$

$$i_\mu = \sqrt{2} \sum_0^{\infty} h \left\{ I_{\mu(1+2h)} \cos(1+2h)\omega t \right\}$$

$$i_{10} = \sqrt{2} \sum_0^{\infty} h \left\{ I_{\mu(1+2h)} \cos(1+2h)\omega t \right\} + \sqrt{2} I_a \text{sen}\omega t$$

Nel funzionamento a vuoto del trasformatore reale all'applicazione di una tensione sinusoidale corrisponde, a regime, la circolazione di una corrente non sinusoidale i cui contenuto armonico è strettamente legato al punto di lavoro del nucleo ferromagnetico

Trasformatore Reale

Funzionamento sotto carico

Determinazione delle correnti circolanti negli avvolgimenti primari e secondari di un trasformatore reale note le tensioni di ingresso e di uscita

$$v_1 = \left(r_1 + L_{1d} \frac{d}{dt} \right) i_1 + N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1\mu})}{dt};$$

$$e_2 = \left(r_2 + L_{2d} \frac{d}{dt} \right) i_2 + v_2;$$

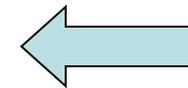
$$N_1 i_{1\mu} = N_1 i_1 + N_2 i_2$$

$$v_1 = \sqrt{2} V_1 \text{sen}(\omega t);$$

$$v_1 = \left(r_1 + L_{1d} \frac{d}{dt} \right) i_1 + N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1\mu})}{dt};$$

$$N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1\mu})}{dt} = \left(r_2' + L_{2d}' \frac{d}{dt} \right) i_2' + v_2';$$

$$i_{1\mu} = i_1 - i_2'$$

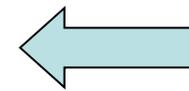


Eseguendo il riporto delle grandezze secondarie al primario,

Trasformatore Reale

$$v_1 = \left(r_1 + L_{1d} \frac{d}{dt} \right) i_1 + N_1 \frac{d\varphi_m(i_{1\mu})}{dt};$$

$$-v'_2 = \left(r'_2 + L'_{2d} \frac{d}{dt} \right) i'_2 - N_1 \frac{d\varphi_m(i_{1\mu})}{dt};$$



Eseguendo la somma e la sottrazione delle eq. ottenute

$$v_1 - v'_2 = (r_1 i_1 + r'_2 i'_2) + \left(L_{1d} \frac{di_1}{dt} + L'_{2d} \frac{di'_2}{dt} \right);$$

$$v_1 + v'_2 = (r_1 i_1 + r'_2 i'_2) + \left(L_{1d} \frac{di_1}{dt} + L'_{2d} \frac{di'_2}{dt} \right) + 2N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1\mu})}{dt};$$

$$i_n = i_1 + i'_2; \quad i_m = i_1 - i'_2;$$

$$r_1 \cong r'_2 = \frac{r_{1cc}}{2}; \quad L_{1d} \cong L'_{2d} = \frac{L_{1cc}}{2}$$

$$v_1 - v_2' = \frac{r_{1cc}}{2} i_{1n} + \frac{L_{1cc}}{2} \frac{di_{1n}}{dt};$$

$$v_1 + v_2' = \frac{r_{1cc}}{2} i_{1m} + \frac{L_{1cc}}{2} \frac{di_{1m}}{dt} + 2N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1m})}{dt};$$

$$i_m = i_1 - i_2';$$

i_m è la corrente magnetizzante del trasformatore. L'analisi delle eq. Evidenzia la presenza di un'equazione differenziale non lineare formalmente e fisicamente uguale a quella del trasformatore a vuoto.

$$ip : v_1 \cong v_2'$$

$$2v_1 = \frac{r_{1cc}}{2} i_{1m} + \frac{L_{1cc}}{2} \frac{di_{1m}}{dt} + 2N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1m})}{dt};$$

$$v_1 \cong N_1 \frac{d\varphi_c(i_{1m})}{dt};$$

Ip. Semplificativa:
trascuriamo le cadute di tensione sulla resistenza e sull'induttanza di dispersione e ripetendo la costruzione grafica

$$v_1 = \sqrt{2} V_1 \text{sen}(\omega t);$$

$$i_{1m} = \sqrt{2} \sum_0^{\infty} h \left\{ I_{\mu(1+2h)} \cos(1+2h)\omega t \right\} + \sqrt{2} I_a \text{sen} \omega t$$

$$v_1 - v'_2 = \frac{r_{1cc}}{2} i_{1n} + \frac{L_{1cc}}{2} \frac{di_{1n}}{dt};$$

$$i_{1n} = \frac{V_m}{\sqrt{2} z_{cc}} \text{sen}(\omega t + \varphi_m - \varphi);$$

$$i_n = i_1 + i'_2; \quad i_m = i_1 - i'_2;$$

$$i_1 = i_n + i_m; \quad i'_2 = i_n - i_m;$$

$$i_1 = \frac{i_n + i_m}{2}; \quad i_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{V_m}{\sqrt{2} z_{cc}} \text{sen}(\omega t + \varphi_m - \varphi) + \sqrt{2} \sum_0^{\infty} h \left\{ I_{\mu(1+2h)} \cos(1+2h)\omega t \right\} + \sqrt{2} I_a \text{sen} \omega t \right\}$$

$$i'_2 = \frac{i_n - i_m}{2}; \quad i'_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{V_m}{\sqrt{2} z_{cc}} \text{sen}(\omega t + \varphi_m - \varphi) - \sqrt{2} \sum_0^{\infty} h \left\{ I_{\mu(1+2h)} \cos(1+2h)\omega t \right\} + \sqrt{2} I_a \text{sen} \omega t \right\}$$

Tale eq. Differenziale è lineare

Ip: tensione primaria e secondaria riportata al primario sinusoidali e isofrequenziali pertanto la loro differenza è pari a

$$v_1 - v'_2 = \sqrt{2} V_m \sin(\omega t + \varphi_m)$$

Nelle condizioni di funzionamento considerate e nei limiti di validità delle ipotesi fatte le correnti che attraversano gli avvolgimenti sotto carico NON sono sinusoidali

Trasformatore Reale

Considerazioni sulla corrente di magnetizzazione i_m :

- **le ampiezze delle componenti armoniche di ordine superiore non sono trascurabili rispetto all'armonica fondamentale;**
- **il nucleo ferromagnetico richiede bassi valori di corrente per eseguire la magnetizzazione;**
- **Le cadute sulle impedenze di dispersione primaria sono molto piccole per cui le tensioni indotte sotto carico sono praticamente identiche a quelle a vuoto, per cui la corrente a vuoto sarà poco differente dalla corrente i_m .**

Il peso delle componenti armoniche della corrente i_m sarà tanto meno influente quanto più elevate saranno le correnti associate al carico.

Pertanto si può ritenere con ragionevole approssimazione che le correnti circolanti sotto carico nel trasformatore reale siano sinusoidali ed il suo comportamento sia assimilabile a quello di un sistema lineare.