Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

9 Settembre 2019

Esercizio 1

Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione tale che

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y & hz \\ hz & x-y \end{pmatrix}$$

a) Verificare che f è lineare e trovare una base di $\ker(f)$ al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$

Si ponga $h = 1$ e si consideri l'applicazione lineare $g: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

- $\ker(g) = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$
- 2 è autovalore di $f \circ g$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore ad esso associato
- $g\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (k,k,0)$

b) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione $f \circ g$ è iniettiva

c) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(\ker(f \circ g)) = 3$.

Esercizio 2

Si consideri lo spazio vettoriale

$$V = L\big((1,1,0,0,0), (0,1,1,0,0), (0,0,1,1,0), (0,0,0,1,1), (2,2,0,0,0)\big)$$

e l'applicazione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow V$ tale che $f(x,y) = (x-y, x, y, 0,0)$

Si considerino i sottospazi di V dati da

$$W_1 = \mathrm{Im}\,(f)$$
$$W_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in V : x_1 + x_2 = 0 \text{ e } x_2 + x_5 = 0\}$$

Stabilire se W_1 e W_2 sono in somma diretta.

In caso affermativo stabilire se $V = W_1 \oplus W_2$.

In caso negativo, trovare un vettore di $W_1 + W_2$ che ammette due decomposizioni distinte come somma di un vettore di W_1 e di un vettore di W_2 (esibire esplicitamente tali decomposizioni distinte).

Esercizio 3

Sia

$$V = L\big((1,1,0,0), (-1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)\big)$$

e sia f l'endomorfismo di V definito da

$$f(x,y,z,w) = (y+z, -2x+3y+z, 2x-y+z, y+z).$$

Stabilire se f è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di V formata da autovettori di f.