Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

7 settembre 2018

Esercizio 1

Si considerino le basi $B_1 = \{(1,1,0), (0,2,1), (2,0,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e $B_2 = \{(1,1), (0,2)\}$ di $\mathbb{R}^2$, e l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la cui matrice associata rispetto alle basi B_1 e B_2 è

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Per il generico vettore (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ si trovi $f(x, y, z)$
b) Data l'applicazione $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $g(x, y) = (y, 0, x - ky)$, determinare il valore del parametro reale k affinché $f \circ g$ è invertibile

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + hx_3 - x_4 = 1 \\ (h-1)x_2 + (1-h)x_4 = h \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - hx_4 = 3 \end{cases}$$

e in corrispondenza di tali valori trovare le soluzioni del sistema.

Esercizio 3

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2 ad entrate reali, munito delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

a) Provare che esiste un unico endomorfismo f di V tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $h \in \mathbb{R}$

b) Trovare, al variare di h, gli autospazi di f e una loro base
c) Stabilire se f è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di autovettori di V