Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

22 Settembre 2017

Esercizio 1

Dimostrare che l'insieme

$$\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f \text{ è lineare e } f(1,2) \in L(0,1)\}$$

è uno spazio vettoriale reale. Si trovi inoltre la dimensione di $\mathcal{F}$ e una sua base.

Esercizio 2

Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione

$$f_k: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

definita nel modo seguente:

$$f_k(ax^2 + bx + c) = (x + k)(ax + c).$$

a) Dimostrare che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, f_k è un endomorfismo di $\mathbb{R}_2[x]$
b) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, f_k è iniettiva
c) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, f_k è suriettiva
d) Fissato $k = 1$, trovare la matrice associata a f_1 rispetto alla base $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ dove $p_1 = -x^2 + 2$, $p_1 = x^2 - 1$, $p_1 = x^2 + 2x - 1$.

Esercizio 3

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli discuti e trova le soluzioni, al variare del parametro reale k, del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 0 \\ -y + kz = 1 \\ ky + 3z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 4

Su uno spazio vettoriale reale V, con base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ si consideri l'applicazione lineare f tale che

$f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_4 \in \ker(f)$
$\mathbf{e}_3$ è un autovettore di f associato all'autovalore 3
$f(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$

Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trova una base di V formata da autovettori di f.