Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

9 Luglio 2019

Esercizio 1

Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a entrate reali e $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x aventi grado minore o uguale a 3. Si consideri l'applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

definita nel modo seguente:

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{pmatrix}$$

per ogni $p \in \mathbb{R}_3[x]$.

a) Trova una base di ker(f)
b) Trova una base di Im(f)
c) Trova la dimensione della controimmagine di $L\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
d) Si considerino le basi $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $B' = \{(1,1), (0,-1)\}$ di $\mathbb{R}^2$, e sia $g: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi B e B' è
$$M_{BB'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Trova $(g \circ f)(x^3 + 1)$.

Esercizio 2

Stabilire per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (k+2)x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ (k+2)x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2kx_1 - 3x_2 + 3x_3 = h \end{cases}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1

Esercizio 3

Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate reali, e

$$f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

l'applicazione tale che

$$f(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per ogni $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Verifica che f è un endomorfismo
b) Trova gli autovalori e gli autospazi di f
c) Stabilisci se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trova una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formata da autovettori di f.