Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

9 luglio 2018

Esercizio 1

Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate reali, e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = (1,0,0), \quad f\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (1,1,0), \quad f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (0,1,0), \quad f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = (0,1,1).$$

a) Trovare $f\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

b) Determinare una base dell'immagine e del nucleo di f

c) Stabilire se f è iniettivo, suriettivo o biettivo

Esercizio 2

Siano $\mathbf{v}_1 = (0,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,1)$ tre vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ ed f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = (2,3,5), \quad f(\mathbf{v}_2) = (1,0,0), \quad f(\mathbf{v}_3) = (0,1,-1).$$

Scrivere la matrice $M_{BB'}(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica B e alla base $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

Esercizio 3

Stabilire per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (k+2)x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ (k+2)x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2kx_1 - 3x_2 + 3x_3 = h \end{cases}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1

Esercizio 4

Sia $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da

$$f\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b-c+d & 2b-d\\ d & d\end{pmatrix}$$

a) Verificare che f è un endomorfismo

b) Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formata da autovettori di f