Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

11 Luglio 2017

Esercizio 1

Dimostrare che l'insieme

$$\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f \text{ è lineare e } f(2,1,0) = f(1,2,0) = f(1,4,-2)\}$$

è uno spazio vettoriale reale. Si trovi inoltre la dimensione di $\mathcal{F}$ e una sua base.

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli discuti e trova le soluzioni, al variare del parametro reale k, del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + ky + kz = 2k - 1 \\ x + ky + z = k \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate reali, e

$$f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

l'applicazione tale che

$$f(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per ogni $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Verifica che f è un'applicazione lineare.
b) Trova gli autovalori e gli autospazi di f.
c) Stabilisci se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trova una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formata da autovettori di f.

Esercizio 4

Stabilire se le seguenti matrici sono simili e in caso affermativo trovare una matrice invertibile P tale che $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$