Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

13 Giugno 2019

Esercizio 1

Sia $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b + c + d, -a + b - d)$$

Si consideri i sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbb{R})$ dati da

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : 3a - b + c + d = 0 \right\}$$

e

$$W_2 = \ker(f).$$

a) Stabilire se $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$.

b) Verificare che W_1 e W_2 non sono in somma diretta.

c) Scrivere due decomposizioni diverse del vettore $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ come somma di un vettore di W_1 e di un vettore di W_2.

d) Si consideri l'applicazione lineare $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che $g(x, y) = \begin{pmatrix} y & kx \\ 0 & -x + 2y \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Determinare il valore di k affinché lo scalare -1 sia autovalore dell'endomorfismo $g \circ f$.

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile e in corrispondenza di tali valori trovarne le soluzioni

$$\begin{cases} kx_1 + kx_2 + x_3 - x_4 + x_5 = k \\ x_3 - x_4 = 0 \\ 2kx_2 + x_5 = k \end{cases}$$

Inoltre, in corrispondenza dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema è uno spazio vettoriale, si trovi una base di tale spazio.

Esercizio 3

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sia $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ una base di V.

a) Siano $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}'_4 = \mathbf{e}_4$. Stabilire se $B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$ è ancora base di V e in caso affermativo trovare la matrice di passaggio da B a B'.

b) Si consideri l'endomorfismo $f: V \longrightarrow V$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_4) = -\mathbf{e}_3$. Stabilire se f è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base di V formata da autovettori di f.