Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

15 Giugno 2017

Esercizio 1

Dato l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- $\ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$
- il vettore $\mathbf{v} = (1,1)$ è un autovettore di f relativo all'autovalore 3

si risponda alle seguenti domande:

a) trova $f(1,2)$,
b) trova la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica,
c) stabilisci se f è diagonalizzabile; in caso affermativo trova una matrice P tale che $P \cdot A \cdot P^{-1}$ è diagonale.

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli discuti e trova le soluzioni, al variare dei parametri reali h e k, del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} hx_1 + x_2 + x_3 + hx_4 = k \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k \\ x_1 + x_2 + hx_3 + (2-h)x_4 = k \end{cases}$$

Inoltre, nel caso in cui $k = 0$ e $h = 1$ trova un sistema di generatori dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema.

Esercizio 3

Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate reali, e

$$f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

l'applicazione tale che $f(A) = A^t + A$, per ogni $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Verifica che f è un'applicazione lineare.
b) Trova gli autovalori e gli autospazi di f.
c) Stabilisci se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trova una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formata da autovettori di f.