Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

9 Settembre 2016

1. Sia $\mathcal{M}_2$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a entrate reali e $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x aventi grado minore o uguale a 3. Si consideri l'applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathcal{M}_2$$

definita nel modo seguente:

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{pmatrix}$$

per ogni $p \in \mathbb{R}_3[x]$.

a) Si determinino una base di ker(f) e una base di Im(f)
b) Trovare la dimensione di $f^{-1}(L(A))$, dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, discutere e risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + kz = k \\ x + (k-1)y = 0 \\ x + (k-1)y + kz = k \end{cases}$$

3. Sia $\mathcal{M}_2$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a entrate reali, e sia

$$F: \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_2$$

l'applicazione tale che, per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2$,

$$F(A) = \mathrm{tr}(A) I_2$$

dove $\mathrm{tr}(A)$ indica la traccia di A, e I_2 indica la matrice unità.

a) Verificare che F è un endomorfismo.
b) Trovare gli autovalori di F ed i relativi autospazi, e stabilire se F è diagonalizzabile.