Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

22 gennaio 2020

Esercizio 1

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 \qquad\qquad\quad - x_4 = 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generato da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Dire se la somma di V e di $V' = L((1,-1,0,0),(-1,0,1,0))$ è diretta.

   In caso affermativo si provi che $V \oplus V' = \mathbb{R}^4$ e si decomponga un generico vettore di $\mathbb{R}^4$ in maniera unica come somma di un vettore di V e di un vettore di V'.

   In caso negativo, si esibisca un vettore di $V + V'$ che ammette due decomposizioni distinte come somma di un vettore di V e di un vettore di V' (scrivere esplicitamente tali decomposizioni distinte).

b) Trovare una base dello spazio vettoriale $L(V,W)$ di tutte le applicazioni lineari da V in W.

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ stabilire se il seguente sistema lineare è compatibile ed in caso affermativo trovarne le soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ kx_1 \qquad\qquad\quad + kx_4 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

Sia

$$V = L\big((1,1,0,0),(-1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\big)$$

e sia f l'endomorfismo di V definito da

$$f(x,y,z,w) = (y+z, -2x+3y+z, 2x-y+z, y+z).$$

Stabilire se f è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di V formata da autovettori di f.